

TRABAJO DE FIN DE GRADO.

*Visualizing the orbital angular momentum of
light vortices.*

Visualizando el momento angular
orbital de los vórtices de luz.



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

CURSO 2018/2019

Autora: *Raquel Fernández de Cabo*

Tutores: *Carlos Hernández García y Julio San Román Álvarez
de Lara*

Índice

Resumen.	2
Abstract.	2
Palabras clave.	3
Key Words.	3
Objetivos.	3
1. Introducción y antecedentes.	5
1.1. Ecuación de Helmholtz.	8
1.1.1. Aproximación Paraxial.	8
1.1.2. Resolución de la ecuación paraxial de Helmholtz.	9
1.2. Análisis de la solución.	9
1.2.1. Solución Gaussiana.	9
1.2.2. Solución de Hermite-Gauss.	11
1.2.3. Solución de Laguerre-Gauss.	15
2. Resultados. Simulaciones a partir de la difracción de Franhoufer para un haz de Laguerre-Gauss	18
2.1. Apertura triangular.	18
2.1.1. Metodología.	19
2.1.2. Simulaciones.	20
2.1.3. Búsqueda del tamaño óptimo de apertura.	22
2.2. Apertura circular.	33
2.3. Mezcla de modos.	34
2.3.1. Mezcla de modos con $\ell = 2$ y $\ell = 1$	34
2.3.2. Mezcla de modos con $\ell = 3$ y $\ell = 1$	36
2.3.3. Mezcla de modos con $\ell = 2$ y $\ell = 3$	38
2.4. Caracterización de momentos angulares elevados.	40
2.5. Estudio de la caracterización de OAM en haces de alta frecuencia: difracción en la zona de rayos X.	45
3. Discusión y conclusiones.	48
Discussion and conclusions.	48
Referencias.	50

Resumen.

En los últimos años, la fotónica ha avanzado de forma exponencial consiguiendo que se puedan desarrollar haces de luz con estructuras complejas, las cuales tienen unas propiedades asociadas muy interesantes, como el momento angular orbital, que es consecuencia de la rotación del frente de onda de un haz de luz.

En el año 2010, un grupo de científicos brasileños publicó un artículo [1] donde mostraban cómo los patrones de difracción de una apertura triangular podían ser útiles para visualizar el momento angular orbital del haz difractado. Lo que observaron consistía en que el número de máximos de intensidad del patrón de difracción era una unidad mayor que la carga topológica del haz (número entero asociado al momento angular).

Este artículo se centraba en el estudio de haces de luz con un frente de ondas helicoidal, es decir, ondas que se propagaban con la forma de un sacacorchos. Esta estructura espacial se puede expresar analíticamente como un haz Laguerre-Gauss que es conocida por tener un momento angular orbital (OAM) bien definido [2]. A pesar de que su OAM esté bien definido, no es evidente poder observarlo.

Los láseres por lo general emiten haces que se van expandiendo gradualmente al propagarse, variando tanto su estructura de fase como su intensidad. Se seleccionan los haces de Laguerre-Gauss por este motivo, puesto que tienen simetría cilíndrica y una estructura de fase sencilla que depende únicamente de un número entero ligado al OAM, conocido como carga topológica.

En la aproximación de campo lejano o Fraunhofer, el patrón de difracción de haces con una estructura helicoidal (concretamente haces Laguerre-Gauss) producido al atravesar de aperturas con forma triangular, nos pueden proporcionar una medida de la carga topológica del mismo.

En este trabajo implementamos un modelo teórico que nos permite simular estos haces y estudiar como se comportan al difractarse en la región de Fraunhofer por diferentes aperturas para poder caracterizar su OAM. Probaremos diferentes tamaños y tipos de aperturas para ver cual es el método más óptimo para esta caracterización así como estudiaremos los límites de ese procedimiento. Finalmente indagaremos en cómo funciona esta técnica para diferentes zonas del espectro electromagnético (diferentes longitudes de onda).

Abstract.

In recent years, photonics have advanced exponentially, enabling light beams with complex structures to be developed, which have associated properties, which have very interesting associated properties, such as orbital angular momentum, associated with the rotation of the wave front of a beam of light.

In the year 2010, a group of Brazilian scientists published an article [1] where they showed the diffraction patterns of a triangular aperture could be useful to visualize the orbital angular momentum of the diffracted beam. What they observed was that the number of intensity peaks of the diffraction pattern was a unit above the topological charge of the beam (integer number associated with angular momentum).

This article focused on the study of beams of light with a helical wave front, that is, waves that propagated in the shape of a corkscrew. This spatial structure can be expressed analytically as a Laguerre-Gauss beam is known to have a well-defined orbital angular momentum (OAM) [2]. Although this moment is well defined, it is not obvious to be able to observe it.

Lasers usually emit beams that gradually expand as they spread varying both their phase structure and intensity. Laguerre-Gauss beams are selected for this reason, as they have cylindrical symmetry and a simple phase structure that depends solely on an integer number linked to the OAM, known as a topological charge.

In the far field approximation (Fraunhofer), the diffraction pattern of beams with a helical structure (specifically beams of Laguerre-Gauss) produced when go through apertures with triangular shape, we can provide a measure of the topological charge of it.

In this work we implement a theoretical model that allows us to simulate these beams and study how they behave when defused in the Fraunhofer region by different apertures to be able to characterize its OAM. We will test different sizes and types of apertures to see which is the most optimal method for this characterization as well as study the limits of that procedure. Finally we will investigate how this technique works for different areas of the electromagnetic spectrum (different wavelengths).

Palabras clave.

Vórtices de luz, momento angular orbital, OAM, carga topológica, haz de Laguerre-Gauss, difracción de Fraunhofer, difracción de campo lejano, patrón de difracción, apertura triangular.

Key Words.

Light vortex, Orbital angular momentum, OAM, topologic charge, Laguerre-Gauss beam, Fraunhofer diffraction, Far field diffraction, diffraction pattern, triangular aperture.

Objetivos.

El objetivo principal es reproducir los resultados obtenidos en el artículo publicado en 2010 por el grupo de óptica y materiales de la Universidad Federal de Alagoas (Brasil) [1] para obtener un método con el cual poder medir el OAM de un haz de Laguerre-Gauss con luz visible (700nm). Para ello, elaboraremos un modelo matemático que nos permita reproducir los patrones de difracción de haces de este tipo.

También tendremos como objetivos:

- Optimizar el patrón de difracción buscando el tamaño de la rendija más óptimo.
- Testar si con aperturas con otras geometrías, en este caso, circulares podemos obtener información de la carga topológica.
- Comprobar el momento angular orbital máximo que esta técnica que nos permite resolver.

- Estudiar la caracterización de un haz con mezcla de dos modos con distinto OAM mediante esta técnica.
- Extrapolar este estudio a la región de los rayos X.

1. Introducción y antecedentes.

Cuando hablamos de la luz, sabemos que ésta se propaga como ondas, en concreto, consiste en dos ondas oscilando perpendicularmente al mismo tiempo: una es el campo magnético y la otra el campo eléctrico. Describiremos la propagación de la luz como la propagación del campo eléctrico:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = |E(x, y, z, t)|e^{i\phi(x, y, z, t)}\vec{e}$$

Este campo tiene una estructura de fase (ϕ) muy compleja ya que depende de todas las coordenadas espaciales y del tiempo. Primero aproximaremos el campo por un campo monocromático con una frecuencia asociada ω_0 , ya que el teorema de Fourier nos permite expresar el campo electromagnético como una suma de ondas monocromáticas [3]. Supondremos además que la onda se propaga a lo largo del eje z :

$$E(x, y, z, t) = A(x, y, z, t)e^{i\omega_0 t}$$

donde $A(x, y, z, t)$ es la amplitud asociada al campo.

Si el haz solo tiene estructura transversal (en el plano perpendicular al eje) tendremos una estructura de campo: $E(x, y, t)$. Normalmente, ésta es relativamente sencilla, como por ejemplo la de un puntero láser que es un haz Gaussiano sin una estructura de fase transversal. Por otra parte, actualmente se pueden generar estructuras muy complicadas que pueden portar momento angular y singularidades como vórtices.

Con estas nociones claras, introducimos el concepto de **vórtice óptico**. Este es un punto singular donde el campo eléctrico que describe la propagación del haz (campo óptico) no tiene una fase bien definida, y por tanto no tiene intensidad. Suele darse cuando la luz se propaga girando alrededor de un eje, debido a que cada punto del haz en este caso tiene una fase distinta y su centro por tanto será una singularidad al tener una fase indefinida. En dos dimensiones (observando las secciones transversales) se ven como puntos mientras en que una visión tridimensional serán líneas.

Un vórtice óptico en el eje de un haz láser suele caracterizarse por una función $R^{|\ell|}e^{i\ell\phi}$ que describe la estructura local del campo óptico alrededor de la singularidad o punto vórtice en la sección transversal del haz, donde ϕ es la fase. El número ℓ es un entero, conocido como carga topológica, que determina el número de veces que la fase toma el mismo valor en un giro completo (360°) o también cuantos giros efectúa el haz de luz a lo largo de una longitud de onda. La carga topológica puede ser positiva o negativa dependiendo de si el sentido de giro es hacia la derecha o hacia la izquierda y cuanto mayor sea, la velocidad de giro entorno al eje será mayor.

Como trabajaremos con haces en los que la luz gira en torno a un eje, necesitaremos conocer como es su propagación y para ello atendremos en primer lugar a su vector de Poynting. El vector de Poynting se conoce por dar el valor de la intensidad de energía electromagnética que atraviesa una superficie perpendicular a la dirección en la que se propaga la onda en un instante de tiempo. Un haz de luz propagándose en el espacio libre tendrá asociado un vector de Poynting, el cual nos dará la dirección y la cantidad del flujo de momento: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$. Cuando tenemos un haz helicoidal, debida a la rotación (que cambia la dirección vector de posición) [4] tendremos un momento angular asociado. Este momento angular será la suma dos contribuciones: el OAM y el momento angular de espín. El OAM vendrá dado por la estructura espacial de fase mientras que el momento angular de espín (σ) estará descrito en función del tipo de polarización del haz, es decir, de la dirección en la que oscila el campo. Cuando la polarización

es lineal el vector de Poynting solo tiene contribución en la dirección de propagación.

En haces con OAM, concretamente haces Laguerre-Gauss, la luz avanzará envolviéndose entorno al eje de propagación, y aparecerá una cantidad de movimiento debido a la interacción electromagnética entre los fotones que están girando. Podremos definir por lo tanto el OAM como $L = \hbar\ell$, y representará una magnitud vectorial dependiente de la posición en el espacio (depende de en que punto del haz desde donde miremos la sección transversal) asociada a la rotación de la luz. En la figura 1 se muestra como avanza un haz con OAM y su distribución de fase e intensidad, donde se identifica la carga topológica ℓ por m :

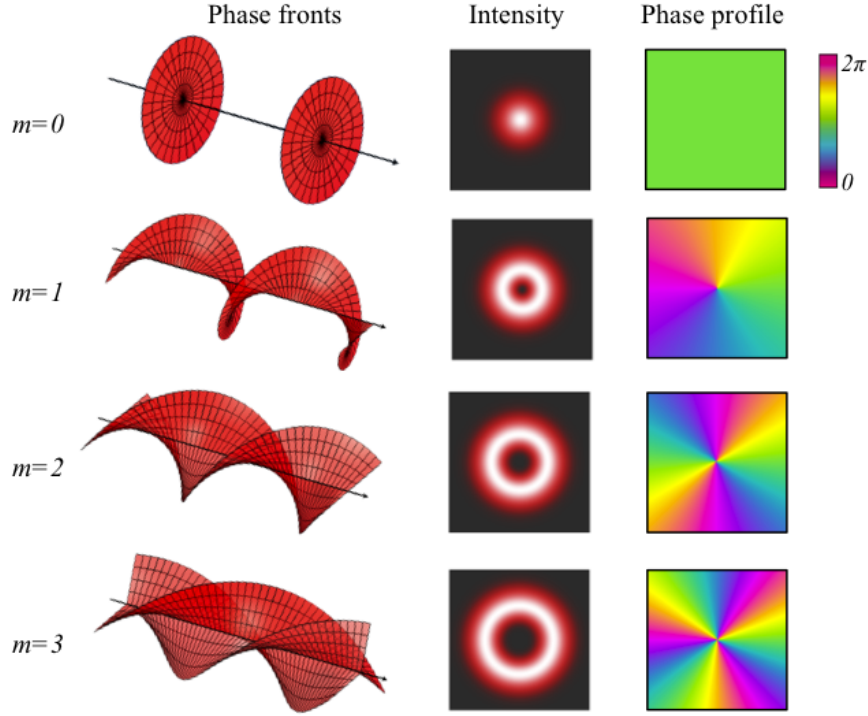


Figura 1: En la primera columna se representa la forma del frente de onda del haz. En la segunda columna vemos la fase de la distribución de la sección del haz. La tercera columna es la distribución de intensidad de la luz de la sección con el vórtice en el centro. Imagen obtenida en <http://cnqo.phys.strath.ac.uk/research/quantum-theory-of-light/optical-angular-momentum/oam-examples/>

A continuación vamos a demostrar que para el estudio que vamos a realizar, donde vamos a centrarnos en polarización lineal, podemos considerar campos escalares.

La expresión del momento angular de una haz de luz con una fase acimutal dependiente de ℓ se caracteriza por que sus campos eléctrico y magnético compartirán una estructura de onda: $u(x, y, z, \phi) = u_0(x, y, z)e^{-ikz}e^{i\ell\phi}$ [5]

$$\frac{J}{\varepsilon} = \frac{\ell \pm \sigma}{\omega} \quad (1)$$

Donde J es el momento angular total, ε la energía de la onda, $\ell\hbar$ la descripción del momento angular orbital de los fotones y $\sigma\hbar$ la descripción del momento angular de espín de los fotones. Cuando estudiamos esto en el límite paraxial, asumimos que $u(x, y, z)$ es normalizable y el haz tendrá una energía finita. En el caso de que $\sigma = 0$ (luz linealmente polarizada), el haz todavía posee un momento angular relacionado a la distribución espacial del haz dependiente de ℓ .

Las aproximaciones de campo monocromático que se propaga en la dirección del eje z para luz con polarización lineal implican:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= ik \left[u\hat{y} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{z} \right] e^{ikz} \\ \vec{E} &= ik \left[u\hat{x} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{z} \right] e^{ikz}\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a obtener un vector de Poynting promediado en el tiempo:

$$\langle \vec{S} \rangle = \epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = i\omega \frac{\epsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \omega k \epsilon_0 |u|^2 \hat{z}$$

Que para un campo de la forma $u(r, \phi, z) = u_0(r, z)e^{i\ell\phi}$, nos proporciona una densidad de momento angular:

$$j_z = \vec{r} \times \langle \vec{S} \rangle_\phi = \frac{\omega k \epsilon_0 |u|^2}{r}$$

Y la densidad de energía del haz será:

$$E = c \times \langle \vec{S} \rangle_z = \epsilon_0 \omega^2 |u|^2$$

De forma que recuperamos la expresión obtenida en 1 para $\sigma = 0$:

$$\frac{j_z}{E} = \frac{\ell}{\omega}$$

Por lo tanto, observamos que el campo es muy complejo pero el vector de Poynting es sencillo ya que es estático en una dirección. Por ello, podemos despreocuparnos de la polarización y en lo siguiente trabajaremos con campos escalares.

El artículo [2] que intentaremos reproducir, se centraba en la difracción de un haz con OAM por una apertura triangular. El patrón de difracción (el cual es la transformada de Fourier del producto del campo incidente y la función que describe la apertura) que se obtenía era un triángulo rotado 60° respecto al de la apertura, compuesto por un número de máximos de intensidad superior en una unidad al valor de la carga topológica del haz difractado. Esto se observa en la figura 2:

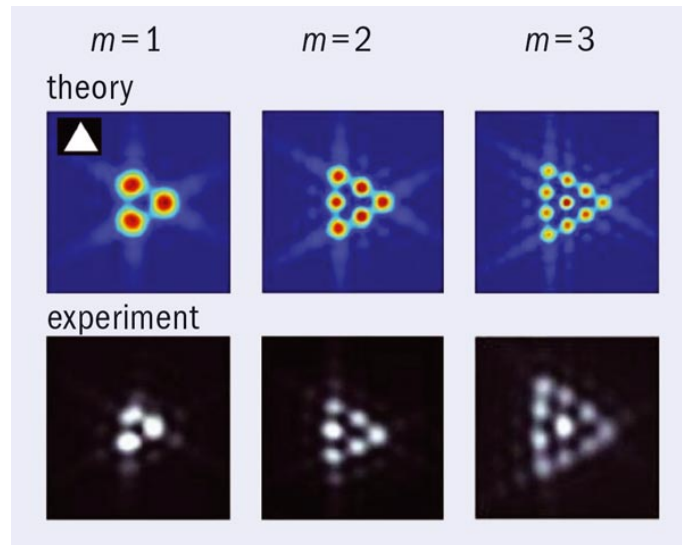


Figura 2: Patrón de intensidad de la difracción de un haz de Laguerre-Gauss al atravesar una apertura triangular para cargas topológicas de 1 (imagen de la izquierda), 2 (imagen central) y 3 (imagen de la derecha). Extraída del artículo original [1]

1.1. Ecuación de Helmholtz.

A continuación vamos a derivar la forma analítica con la que podemos expresar los vórtices de luz, los modos de Laguerre Gauss. Para ello tenemos que estudiar cómo se propaga, por lo que partimos de ecuación de Laplace [6] que nos proporciona la teoría electromagnética para el campo eléctrico propagándose en el vacío:

$$\nabla^2 E(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Si trabajamos con una onda monocromática, esta tendrá una frecuencia (ω) asociada constante. Podremos por lo tanto buscar una solución de la forma: $E(\vec{r}, t) = E(x, y, z)e^{-i\omega t}$.

$$\nabla^2 E(x, y, z)e^{-i\omega t} = \frac{(i\omega)^2}{c^2} E(x, y, z)e^{-i\omega t} = \frac{-\omega^2}{c^2} E(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

Donde conociendo que el vector de onda se relaciona con la frecuencia de forma: $k = \frac{\omega}{c}$, obtenemos la ecuación de Helmholtz.

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

1.1.1. Aproximación Paraxial.

Supondremos que la trayectoria que seguirán los rayos formarán ángulos (θ) muy pequeños con el eje de propagación, que en nuestro caso tomaremos como el eje z. Esta aproximación implicará [7] que la variación en el eje z de la amplitud sea muy lenta y podremos despreciar el término de la segunda derivada en esa dirección.

$$tg(\theta) \sim \theta \quad \sin(\theta) \sim \theta \quad \cos(\theta) \sim 1$$

¿Qué implicará asumir esta aproximación?

La aproximación paraxial representará que la onda localmente es una onda plana, cuyos frentes de onda serán perpendiculares a los rayos paraxiales. Nos llevará a poder tomar un campo eléctrico que siga la forma:

$$\vec{k} = k\vec{u}_z \quad E(x, y, z) = E_0(x, y, z)e^{ikz}$$

Sustituyendo en la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) E_0(x, y, z)e^{ikz} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial z} e^{ikz} + ikE_0(x, y, z)e^{ikz} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) E_0(x, y, z)e^{ikz} - k^2 E_0(x, y, z)e^{ikz} + \frac{\partial^2 E_0(x, y, z)}{\partial z^2} e^{ikz} + 2ik \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial z} e^{ikz} = 0$$

Llegaremos a la ecuación paraxial, despreciando el término de la segunda derivada con respecto a z:

$$\nabla_{\perp}^2 E_0(x, y, z) = -2ik \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial z} \quad (4)$$

Donde hemos definido:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

1.1.2. Resolución de la ecuación paraxial de Helmholtz.

Una forma de resolver esta ecuación es mediante el método de separación de variables:

$$E_0(x, y, z) = A(x)B(y)C(z)$$

$$\frac{\partial^2 A(x)}{A(x)\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(y)}{B(y)\partial y^2} + 2ik \frac{\partial C(z)}{C(z)\partial z} = 0$$

Para la parte en x, podemos simplificar a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes [8]:

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = -A_1 A(x) \implies A(x) = A_2 \cos(\sqrt{A_1}x) + A_3 \sin(\sqrt{A_1}x)$$

Y será equivalente para la coordenada en y:

$$B(y) = B_2 \cos(\sqrt{B_1}y) + B_3 \sin(\sqrt{B_1}y)$$

Obteniendo por tanto para la coordenada en z una ecuación que dependerá de las constantes obtenidas anteriormente y serán características de cada haz:

$$2ik \frac{\partial C(z)}{C(z)\partial z} = A_1 + B_1 \implies \frac{\partial \ln(C(z))}{\partial z} = \frac{A_1 + B_1}{2ik} \implies C(z) = C_1 e^{-iz \frac{A_1 + B_1}{2k}}$$

1.2. Análisis de la solución.

1.2.1. Solución Gaussiana.

Una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz y quizá la más sencilla y conocida es la solución Gaussiana [9], que tiene la forma:

$$E_G(x, y, z) = \frac{E_0}{q(z)} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}} \quad (5)$$

Donde para que la solución sea general hemos escogido $q(z)$ como un complejo ($q(z) = z + iz_0$) y $E_0 = cte$, redefinimos:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W(z)^2}$$

$R(z)$ y $W(z)$ son medidas de la anchura y la curvatura del frente de ondas del láser.

Nos proporcionarán finalmente la expresión de un haz Gaussiano:

$$E_G(x, y, z) = E_1 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{x^2 + y^2}{W(z)^2}} e^{-ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i\xi(z)} \quad (6)$$

Donde los parámetros mencionados son:

■ Anchura:
$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

- Radio de curvatura: $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$

- Fase de Gouy: $\xi(z) = tg^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right)$

- Cintura: $W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{2z_0}{k}}$

- Amplitud compleja: $E_1 = \frac{E_0}{iz_0}$

La complicación vendrá dada por que tendremos una amplitud para el láser Gaussiano compleja, que analizaremos más adelante.

Intensidad:

La intensidad del haz se define como $I(r) = |E(r)|^2$ y se mide en $\frac{W}{m^2}$. Las intensidades ópticas suelen entenderse como cantidades las cuales son promediadas únicamente sobre el último ciclo de oscilación de la onda.

$$I(x, y, z) = |A_0|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{W(z)^2}}$$

Donde observamos que para $x = y = z = 0$ dicha intensidad es máxima: $I_0 = |A_0|^2$. Después, esta decrece monótonamente al aumentar $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ llegando a anularse para valores de ρ muy grandes. Al aumentar la distancia axial z aumentará el diámetro del láser pero será menos intenso.

Anchura:

La anchura del haz $W(z)$, conocida como radio del haz es la distancia desde el eje del haz hasta la zona donde la intensidad es $\frac{1}{e^2}$ el valor del haz en el eje.

$$\rho = W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}$$

Tendrá un valor mínimo W_0 cuando $z = 0$, que coincide con la zona de mayor intensidad del haz y se conoce como cintura del haz.

Divergencia:

La divergencia es una medida de cómo de rápido se expande el haz en el campo lejano de su valor mínimo W_0 (cintura del haz). Los haces los cuales tienen una anchura constante, es decir, no tienen divergencia son conocidos como haces colimados.

Para valores de z mucho mayores que z_0 , tendremos una relación lineal, definiendo el ángulo de divergencia θ_0 :

$$W(z) = \theta_0 z$$

$$\theta_0 = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

Longitud de Rayleigh:

Es la distancia desde la cual moviéndonos en la dirección de propagación la anchura del haz es un factor $\sqrt{2}$ mayor que la cintura del haz.

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$

Donde λ es la longitud de onda en el vacío dividida por el índice de refracción del medio (n).

Fase:

La fase del láser Gaussiano será:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \xi(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}$$

En el centro del eje para $\rho = 0$:

$$\varphi(0, z) = kz - \xi(z)$$

Es decir, la fase tendrá dos componentes: kz representará la fase de una onda plana mientras que la segunda componente el desfase respecto de esta, conocido como la fase de Guoy.

La fase de Guoy se representa por: $\xi(z) = -tg^{-1}(z/z_0)$. Esto resulta en un ligero incremento de la distancia entre los frentes de onda en comparación con la longitud de onda definida para una onda plana de la misma frecuencia, es decir, los frentes de onda se propagan más deprisa derivando en un incremento efectivo de la velocidad de fase local.

En la siguiente figura 3 podemos visualizar estas propiedades que hemos mencionado:

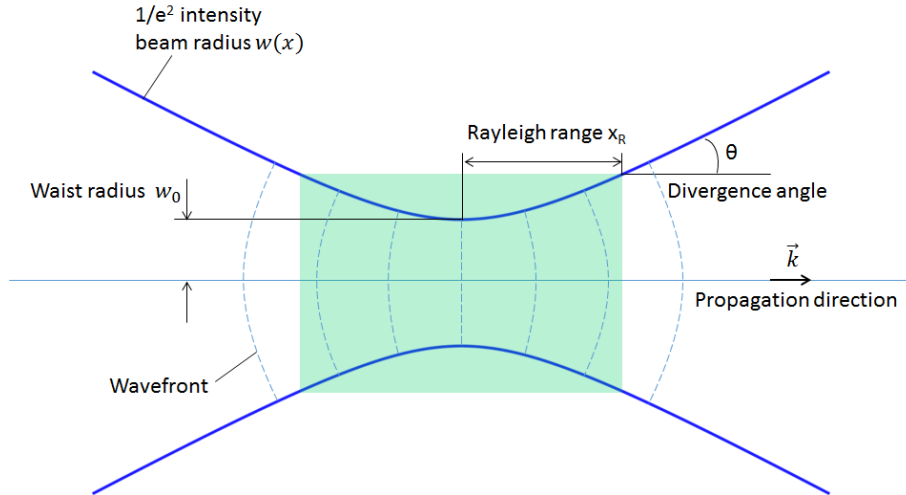


Figura 3: Propiedades de un haz Gaussiano a lo largo del eje de propagación. Obtenida en <https://www.comsol.com/blogs/understanding-the-paraxial-gaussian-beam-formula/>

1.2.2. Solución de Hermite-Gauss.

Existen mas soluciones con las características de un haz Gaussiano. Las soluciones que no tienen una distribución de intensidad Gaussiana pero que comparten el frente de onda paraboloidal de estos haces. Otra solución por lo tanto se compondrá por la solución Gaussiana

dada por la ecuación (5) y por una distribución de intensidad dependiente de las coordenadas x e y :

$$E(x, y, z) = X \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] e^{iZ(z)} E_G \quad (7)$$

Donde X , Y y Z son funciones reales. Tendrá las siguientes propiedades:

- La fase difiere con la del haz Gaussiano en una cantidad $Z(z)$ independiente de x e y . Si $Z(z)$ varía lentamente con z , esta diferencia es pequeña y ambas ondas tienen el mismo frente de onda paraboloidal con el mismo radio de curvatura $R(z)$.

- Observamos la cantidad:

$$\frac{E_0}{iz_0} X \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}}$$

Podemos definir $A_0 = \frac{E_0}{iz_0}$ que será una función de $\frac{x}{W(z)}$ e $\frac{y}{W(z)}$, cuya amplitud en las direcciones x e y variará con z con el mismo factor de escala $W(z)$. Es decir, cuando z incrementa la distribución de intensidad del haz en el plano transversal permanece constante salvo por un factor de aumento de $W(z)$. Esta distribución es una distribución Gaussiana modulada en las direcciones x e y por las funciones X^2 e Y^2 .

Sustituyendo esta solución en la ecuación paraxial de Hemholtz:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

Y haciendo los cambios de variables: $u = \sqrt{2} \frac{x}{W(z)}$, $v = \sqrt{2} \frac{y}{W(z)}$

Introducimos estas variables en la ecuación paraxial de Helmholtz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{2}{W} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial X}{\partial u} Y e^{iZ} E_G + \frac{\partial E_G}{\partial u} X Y e^{iZ} \right) = \\ &= \frac{2}{W} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} Y e^{iZ} E_G + 2 \frac{\partial E_G}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} Y e^{iZ} \right) + \frac{\partial^2 E_G}{\partial x^2} X Y e^{iZ} = \\ &= E \frac{2}{W} \left(\frac{\partial^2 X}{X \partial u^2} + \frac{2}{X E_G} \frac{\partial E_G}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{E}{E_G} \frac{\partial^2 E_G}{\partial x^2} = \\ &= E \frac{2}{W} \left(\frac{\partial^2 X}{X \partial u^2} - \frac{2u}{X} \left(1 + \frac{i k W^2}{2R} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{E}{E_G} \frac{\partial^2 E_G}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Para la ecuación con Y el proceso es exactamente igual que con X .

La derivada parcial en z es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} Y e^{iZ} E_G + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} X e^{iZ} E_G + i E \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial E_G}{\partial z} X Y e^{iZ} = \\ &= E \left(-\frac{z W_0^2}{z_0 W^2} \left(\frac{u}{X} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{v}{Y} \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + i \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{E_G} \frac{\partial E_G}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Donde:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -u \frac{zW_0^2}{(z_0W)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -v \frac{zW_0^2}{(z_0W)^2}$$

Igualando estos resultados:

$$\begin{aligned} \frac{2}{W} \left(\frac{\partial^2 X}{X \partial u^2} + \frac{\partial^2 Y}{Y \partial v^2} - \left(\frac{2u}{X} + \frac{2v}{Y} \right) \left(1 + \frac{i kW^2}{2R} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{1}{E_G} \left(\frac{\partial^2 E_G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_G}{\partial y^2} \right) = \\ = 2ik \left(-\frac{zW_0^2}{(z_0W)^2} \left(\frac{u}{X} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{v}{Y} \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + i \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial E_G}{E_G \partial z} \right) \end{aligned}$$

Y sabiendo que E_G es solución de la ecuación paraxial, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{2}{W} \left(\frac{\partial^2 X}{X \partial u^2} + \frac{\partial^2 Y}{Y \partial v^2} - \left(\frac{2u}{X} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{2v}{Y} \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \left(1 + \frac{i kW^2}{2R} \right) \right) = \\ = 2ik \left(-\frac{zW_0^2}{(z_0W)^2} \left(\frac{u}{X} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{v}{Y} \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + i \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - u \left(2 + \frac{i kW^2}{R} - ik \frac{zW_0^2}{z_0^2} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - v \left(2 + \frac{i kW^2}{R} - ik \frac{zW_0^2}{z_0^2} \right) \frac{\partial Y}{\partial v} \right) = \\ = -kW^2 \frac{\partial Z}{\partial z} \end{aligned}$$

Y podremos ver que el término con la derivada de primer orden de X e Y se simplifica sustituyendo k y R :

$$2 + \frac{i kW^2}{R} - ik \frac{zW_0^2}{z_0^2} = 2 + i \frac{2z_0}{W_0^2} \frac{W_0^2}{z} \frac{\frac{z_0^2 + z^2}{z_0^2 + z^2}}{\frac{z^2}{z_0^2 + z^2}} + i \frac{2z_0}{W_0^2} \frac{zW_0^2}{z_0} = 2 + 2i \frac{z}{z_0} - 2i \frac{z}{z_0} = 2$$

Obteniendo finalmente:

$$\frac{1}{X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + kW^2(z) \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

Los términos X e Y solo dependen de una variable, u y v respectivamente, implica que las soluciones cumplen a la vez:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u} \right) &= -\mu_x \\ \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v} \right) &= -\mu_y \\ kW^2(z) \frac{\partial Z}{\partial z} &= \mu_x + \mu_y \end{aligned}$$

Si tomamos $\mu_x = 2m$ y $\mu_y = 2n$, las dos primeras serán ecuaciones de Hermite, del tipo:

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2m H_m = 0$$

Y tienen como soluciones los polinomios de Hermite:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left(\frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} \right)$$

Por otra parte, sustituyendo μ_x , μ_y y $W(z) = \sqrt{\frac{2z_0}{k}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$ la última ecuación toma la forma:

$$z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{\partial Z}{\partial z} = n + m$$

Que podemos resolver de manera sencilla integrando:

$$Z(z) = \frac{n+m}{z_0} \int \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} dz = (n+m) \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Con estas tres soluciones podemos escribir la solución completa para este tipo de haces, conocidos como los modos de Hermite-Gauss:

$$E_{m,n}(x, y, z) = E_0 \frac{W_0}{W} H_m \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] H_n \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] e^{i(kz - (m+n+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} e^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W^2(z)}} \quad (8)$$

Vemos que para el orden fundamental $n = m = 0$ coincide con la solución Gaussiana y que estos modos tienen los mismos valores de $W(z)$ y $R(z)$. Esto implica que serán de un tamaño similar y por tanto sus radios de curvatura coincidirán, es decir, se propagan de la misma manera que el orden fundamental donde solo cambiará la intensidad en la sección transversal y la fase.

La figura 4 a continuación nos muestra la distribución de intensidad para diferentes valores de n y m :

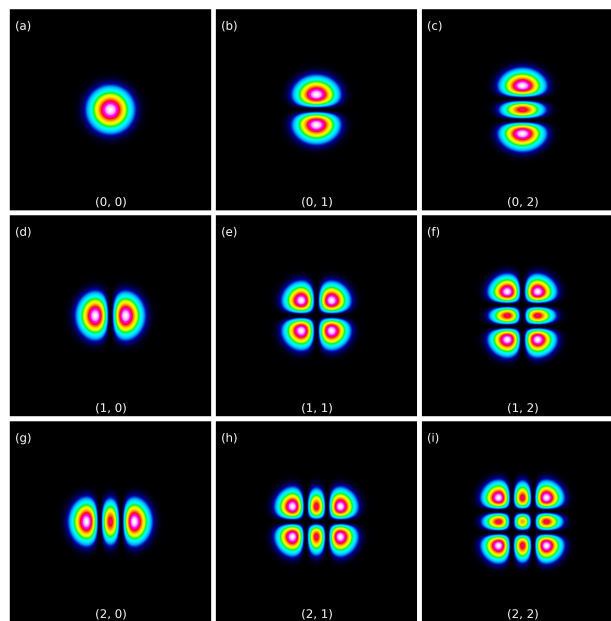


Figura 4: Modos de Hermite-Gauss. Obtenido de <https://www.dataray.com/blog-m2-high-order-modes.html>

1.2.3. Solución de Laguerre-Gauss.

Cuando escribimos la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , y utilizamos el método de separación de variables para ρ y ϕ en vez de x e y :

$$\nabla_{\perp}^2 E(x, y, z) = -2ik \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E(\rho, \phi, z)}{\partial \phi^2} = -2ik \frac{\partial E(\rho, \phi, z)}{\partial z}$$

Y siguiendo el planteamiento que con los modos de Hermite-Gauss al sustituir en la ecuación de Helmholtz en cilíndricas, obtenemos como solución [10] [9] un haz de Laguerre-Gauss:

$$E_{p,\ell}(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{W_0}{W} \left[\sqrt{2} \frac{\rho}{W(z)} \right]^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left[2 \frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] e^{i(kz - (2p+|\ell|+1)\text{arctg}(\frac{z}{z_0}))} e^{i \frac{k\rho^2}{2R(z)}} e^{\frac{-\rho^2}{W^2(z)}} e^{i\ell\phi} \quad (9)$$

Los índices p y ℓ representan los modos radial y angular.

En este apartado no hemos desarrollado el procedimiento al igual que para los Hermite-Gauss ya que como se ve en el artículo [10] el desarrollo matemático es de gran complejidad.

Representamos el haz en las figuras 5 y 6 para los distintos modos, variando los valores de p y ℓ (los cuales son números enteros). El haz representado tiene una longitud de onda de 700 nm y una cintura del haz $W_0 = 1 \cdot 10^{-3}m$ y se observa a una distancia $z = 10^{-15}m$ (debido a que en $z = 0$ podríamos tener problemas de divergencia en $R(z)$ y así evitamos definir este punto a parte), donde todas las unidades de longitud que se muestran son metros y las angulares son radianes.

En los siguientes apartados de este trabajo solamente nos interesará en caracterizar modos de Laguerre-Gauss con distinta carga topológica analizando su difracción a través de una apertura y por consecuente nos centraremos en los modos con $p = 0$.

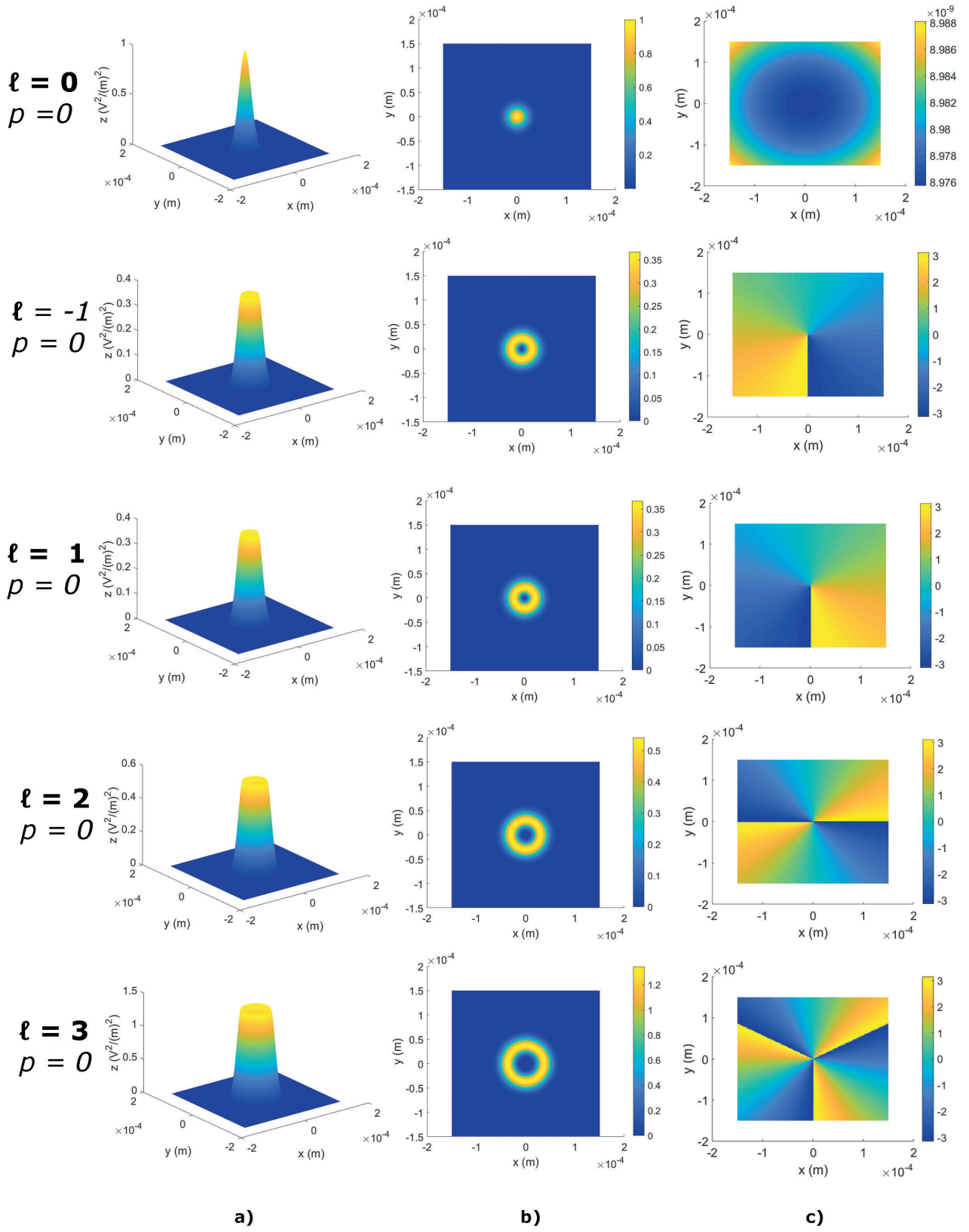


Figura 5: Para un haz de Laguerre-Gauss con los valores de L y P descritos en la imagen: a) Patrón de intensidad del haz visto de perfil (sección en el plano xy para $z = 10^{-15}m$). b) Patrón de intensidad del haz visto desde arriba. c) Estructura de fase del haz.

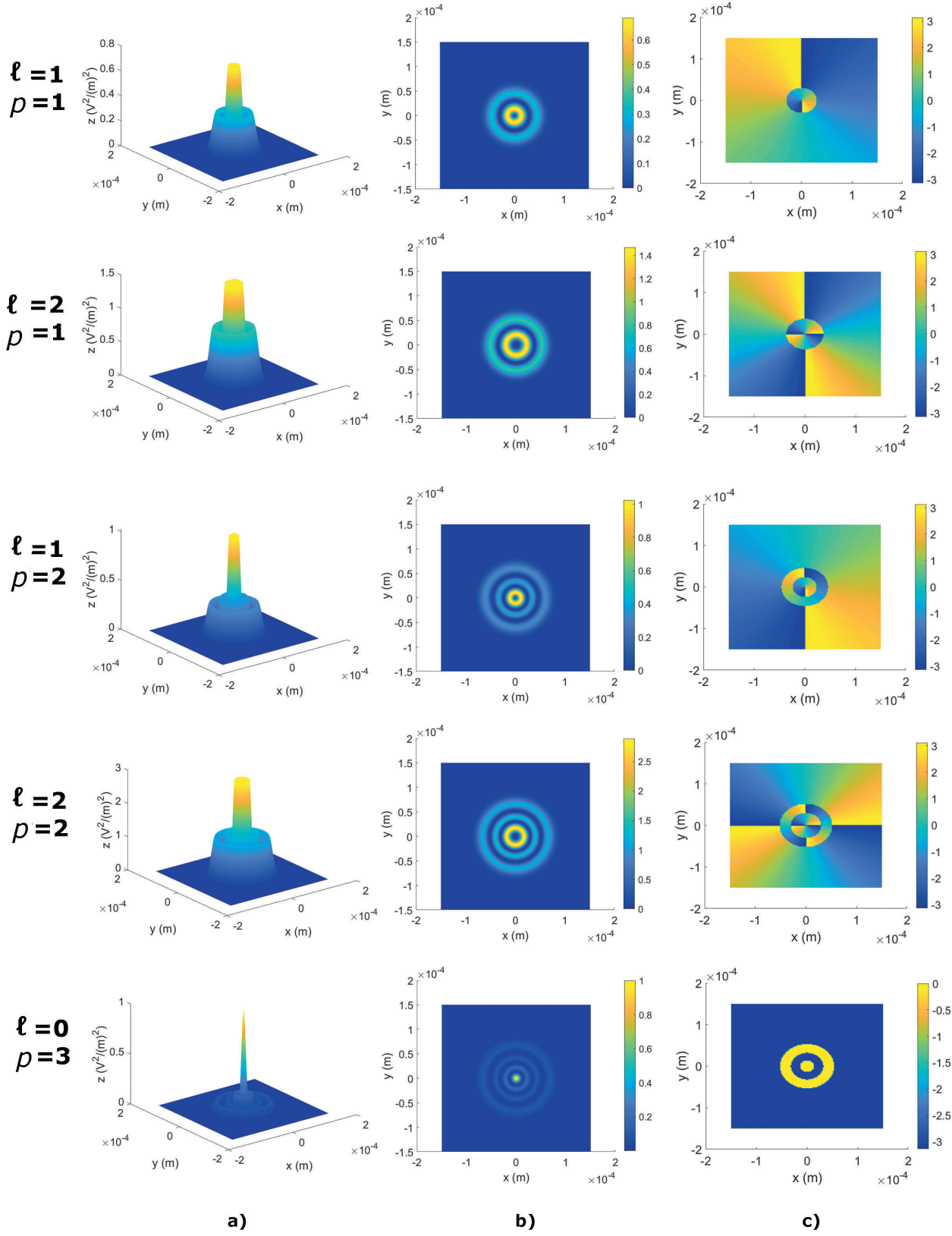


Figura 6: Para un haz de Laguerre-Gauss con los valores de L y P descritos en la imagen: a) Patrón de intensidad del haz visto de perfil. b) Patrón de intensidad del haz visto desde arriba (sección en el plano xy para $z = 10^{-15}m$). c) Estructura de fase del haz.

2. Resultados. Simulaciones a partir de la difracción de Fraunhofer para un haz de Laguerre-Gauss

Primero, vamos a estudiar como se difracta un haz de Laguerre-Gauss por una apertura en el régimen de Fraunhofer. Este régimen se da cuando el número de Fresnel [11] es mucho menor que 1:

$$N_F = \frac{a^2}{z\lambda} \ll 1$$

Siendo a el tamaño de la apertura, z la distancia a la que colocamos la pantalla y λ la longitud de onda. Para ello debemos escribir la forma de la difracción de Fraunhofer:

$$E(x_1, y_1, z_1) \propto \iint_{Apertura} E(x, y) e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} dx dy$$

Esta ecuación la podemos utilizar cuando estudiamos la difracción a largas distancias, es decir, cuando nuestra pantalla está muy alejada cumpliendo la relación indicada anteriormente del número de Fresnel. En esta expresión las coordenadas con subíndice 1 son las coordenadas en los puntos de la pantalla, mientras que las normales son las que caracterizan la apertura. El campo $E(x, y)$ en nuestro caso será el campo creado por el haz de Laguerre-Gauss, por lo que podemos reescribir:

$$\begin{aligned} E(x_1, y_1, z_1) &= E_0 \frac{W_0}{W} L_p^{|\ell|} e^{i(kz - (2p+|\ell|+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} \\ &\quad \iint_{Apertura} \left[\sqrt{2} \frac{\rho}{W(z)} \right]^{|\ell|} \left[2 \frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] e^{i\frac{k\rho^2}{2R(z)}} e^{\frac{-\rho^2}{W^2(z)}} e^{i\ell\phi} e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} dx dy \\ E(x_1, y_1, z_1) &= E_0 \frac{W_0}{W} e^{i(kz - (2p+|\ell|+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} \iint_{Apertura} L_p^{|\ell|} \\ &\quad \left[\sqrt{2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{W(z)} \right]^{|\ell|} \left[2 \frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} \right] e^{i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}} e^{\frac{-(x^2 + y^2)}{W^2(z)}} e^{i\ell\arctg(y/x)} e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} dx dy \end{aligned}$$

Como hemos comentado anteriormente, en este trabajo nos vamos a centrar en los modos con con modo radial nulo. Por tanto, la expresión anterior para $p = 0$ adquiere la forma:

$$\begin{aligned} E(x_1, y_1, z_1) &= E_0 \frac{W_0}{W^{3+|\ell|}} e^{i(kz - (|\ell|+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} \iint_{Apertura} [2(x^2 + y^2)]^{\frac{|\ell|}{2}+1} \\ &\quad e^{(x^2 + y^2)(-\frac{1}{W^2} + i\frac{k}{2R(z)})} e^{i\ell\arctg(y/x)} e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} dx dy \end{aligned}$$

2.1. Apertura triangular.

Realizamos simulaciones que consistirán en un haz que sigue una estructura de campo de Laguerre-Gauss atravesando una apertura triangular y observaremos su patrón de difracción en una pantalla situada lo suficientemente lejos para que trabajemos en el régimen de Fraunhofer. Hacemos incidir un haz de Laguerre-Gauss sobre una apertura triangular con forma equilátera,

para sus modos radiales nulos ($p = 0$) mientras que variamos los valores de OAM (ℓ) desde 0 hasta 3.

Realizamos la integral en la superficie de una apertura triangular equilátera:

$$E(x_1, y_1, z_1) = E_0 \frac{W_0}{W^{3+|\ell|}} e^{i(kz - (|\ell|+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{(y-2h/3)/2 \cos(60)}^{-(y-2h/3)/2 \cos(60)} [2(x^2 + y^2)]^{\frac{|\ell|}{2}+1} e^{(x^2+y^2)(-\frac{1}{W^2} + i\frac{k}{2R(z)})} e^{i\ell \arctg(y/x)} e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} dx dy$$

Los límites de la integral los obtenemos a partir de considerar el triángulo equilátero como la intersección de tres rectas como se muestra en la figura 7:

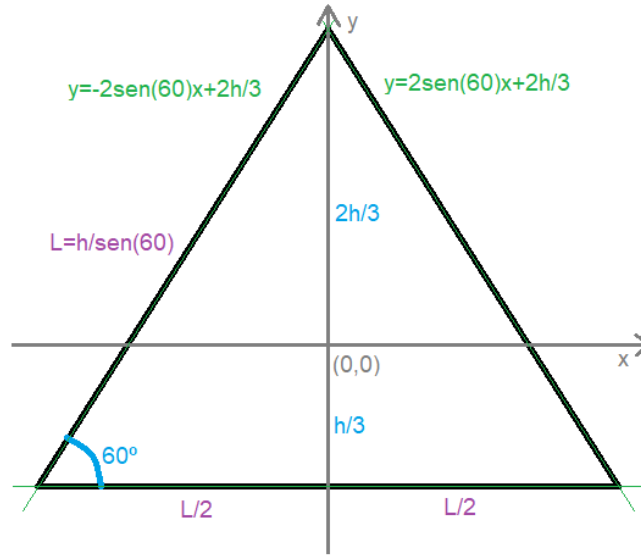


Figura 7: Triángulo como intersección de rectas.

Donde hemos sustituido el valor de x como: $x = \frac{y - 2h/3}{2 \cos(60)}$

2.1.1. Metodología.

Realizamos las simulaciones en MatLab. El método de integración que hemos utilizado en ellas consiste en aproximar la integral por un sumatorio, de forma que:

$$E(x_1, y_1, z_1) = E_0 \frac{W_0}{W^{3+|\ell|}} e^{i(kz - (|\ell|+1)\arctg(\frac{z}{z_0}))} \sum_{N_x} \sum_{N_y} [2(x^2 + y^2)]^{\frac{|\ell|}{2}+1} e^{(x^2+y^2)(-\frac{1}{W^2} + i\frac{k}{2R(z)})} e^{i\ell \arctg(y/x)} e^{-i\frac{k}{z_1}(x_1x + y_1y)} \frac{y_{max} - y_{min}}{N_y} \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x}$$

Donde N_x y N_y representan el número de puntos a lo largo de las direcciones x e y que utilizamos en las simulaciones para definir la apertura.

Debemos tener en cuenta que MatLab nos ofrece dos funciones para poder calcular la fase de los haces Laguerre-Gauss: $atan(Y/X)$ y $atan2(Y, X)$.

La función inversa de la tangente $atan(Y/X)$ se define como: $\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$, donde $Y = Im(z)$ y $X = Re(z)$.

Esta función tiene sus límites establecidos en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ proporcionándonos un ángulo en radianes comprendido entre dichos valores. Con esta función no hemos recuperado correctamente la forma de la fase de estos modos.

Para solucionar este error, utilizamos la función inversa de la tangente definida en MatLab $atan2(Y, X)$, la cual nos devuelve un ángulo comprendido entre $[-\pi, \pi]$ también en radianes, lo que concuerda con la función con la que llamamos a nuestro ángulo ($angle(Z)$) que nos devuelve la fase en radianes del número complejo Z y toma valores entre $[-\pi, \pi]$.

2.1.2. Simulaciones.

El haz con el que trabajamos tiene los mismos parámetros que el utilizado para representar los modos: $\lambda = 700 \text{ nm}$ y $W_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. El número de puntos utilizado en la apertura será el mismo para x e y : $N_x = N_y = 150$.

En este trabajo será de utilidad el radio del máximo de los anillos del haz de Laguerre-Gauss. Para sus modos con número radial $p = 0$ viene dado por la relación [12]:

$$R_{Max} = W_0 \sqrt{\frac{|\ell|}{2}}$$

Obtendremos por tanto para los valores de carga topológica 1, 2, 3 y 4 los siguientes valores para el radio del máximo:

$$\begin{aligned} \ell = 1 &\rightarrow R_{Max} = 707,11 \mu m \\ \ell = 2 &\rightarrow R_{Max} = 1000,00 \mu m \\ \ell = 3 &\rightarrow R_{Max} = 1224,74 \mu m \\ \ell = 4 &\rightarrow R_{Max} = 1414,21 \mu m \end{aligned}$$

Estaremos en el régimen de Fraunhofer para distancias a las que situemos la pantalla z que cumplan:

$$\frac{a^2}{\lambda} \simeq \frac{1000^2}{0,7} \simeq 1,42 \cdot 10^6 \mu m = 1,42 m \ll z$$

Por lo tanto, los órdenes de magnitud empleados serán una apertura del orden de $10^3 \mu m$, y situamos la pantalla a unos 7 m de distancia.

Analizamos el modo con $\ell = 0$ y $p = 0$ por separado debido a que éste no es un anillo, sino el modo fundamental que es una Gaussiana como se aprecia en la figura 8. En ella vemos: a) patrón de difracción formado en una pantalla a 7 m de distancia y b) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección transversal del haz en el plano xy)

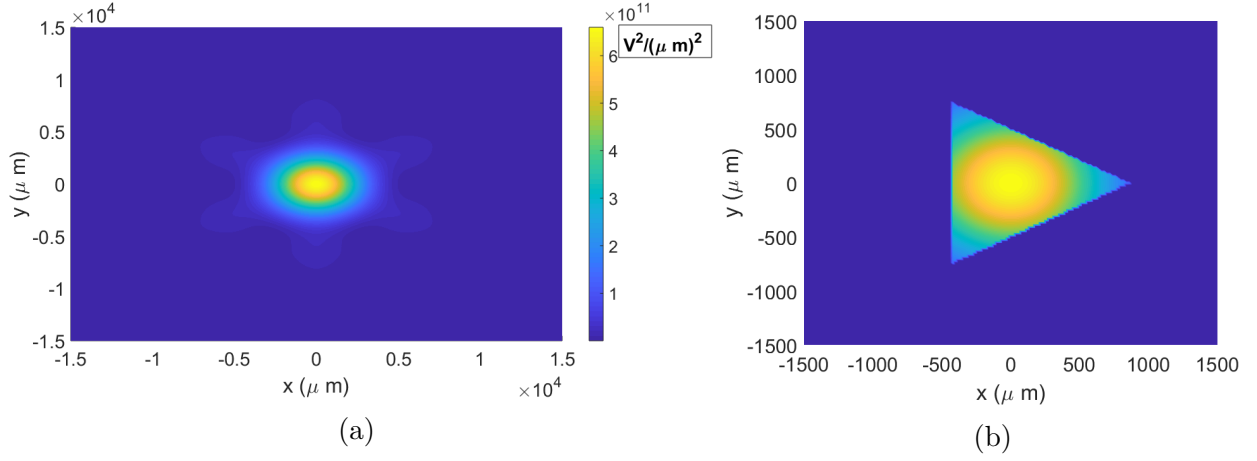


Figura 8: Haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 0$ y $p = 0$ atravesando una apertura triangular de base $1500 \mu m$: a) patrón de difracción formado en una pantalla a 7 m de distancia y b) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección transversal del haz en el plano xy).

Definimos un parámetro que nos permita relacionar el tamaño de la apertura y el radio del máximo de intensidad del anillo (y por tanto la cantidad de energía que la atraviesa):

$$\eta = \frac{\text{Base triángulo}}{\text{Radio máximo del haz}}$$

Clasificaremos todas las figuras en función del parámetro η para tener una relación analítica de la energía que atraviesa la apertura.

Conseguimos recuperar los resultados esperados por el artículo [1], como mostraremos en la figura 9: (a) el patrón de difracción y (b) la intensidad a lo largo del plano xy del haz al atravesar la apertura triangular, para distintos modos de Laguerre-Gauss: (primera fila) $\ell = 1$, (segunda fila) $\ell = 2$ y (tercera fila) $\ell = 3$.

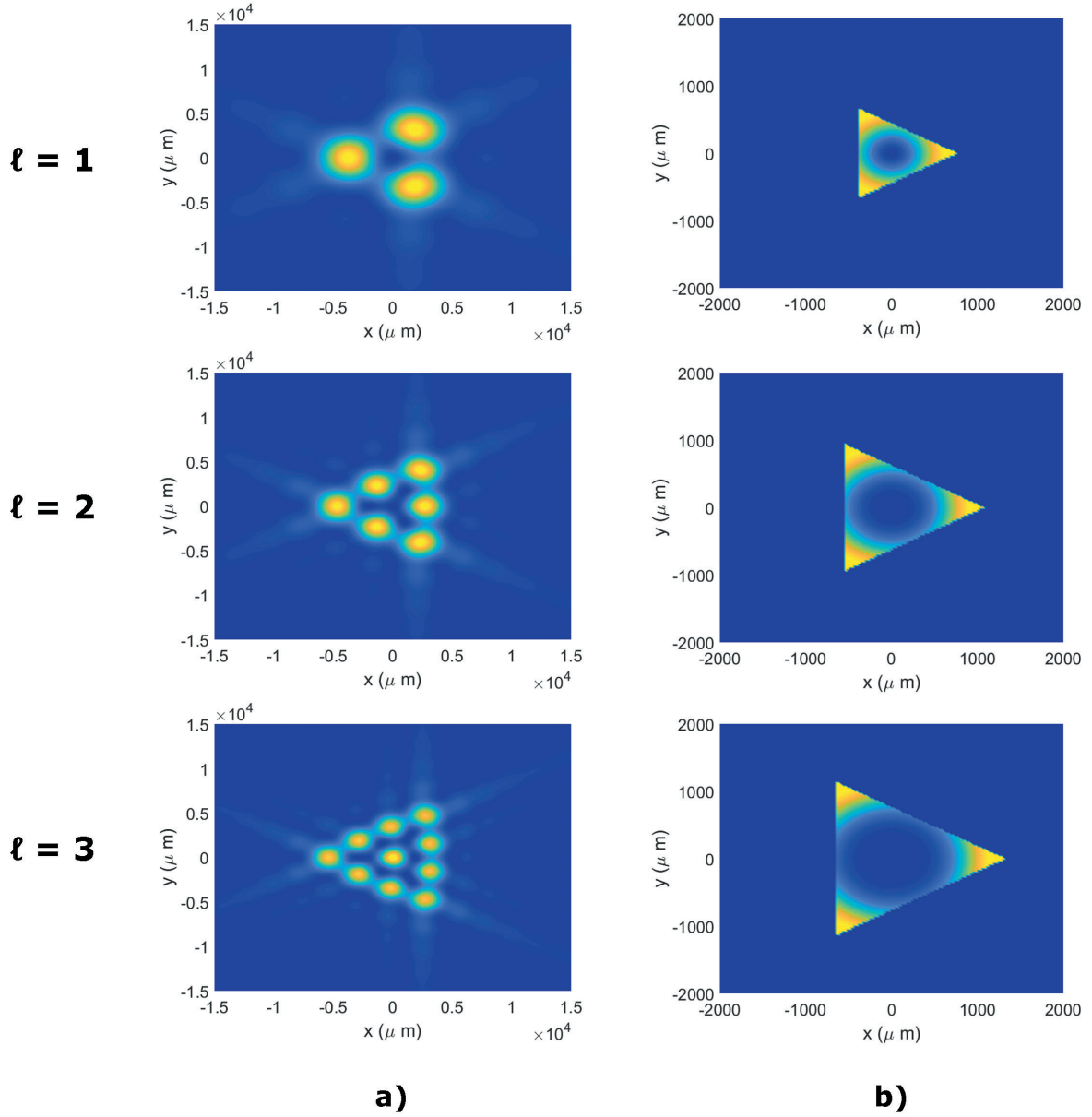


Figura 9: Haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y ℓ indicado en la columna de la izquierda atravesando una apertura triangular de $\eta = 1,8779$: (a) el patrón de difracción y (b) la intensidad a lo largo del plano xy del haz al atravesar la apertura triangular, para distintos modos de Laguerre-Gauss: (primera fila) $\ell = 1$, (segunda fila) $\ell = 2$ y (tercera fila) $\ell = 3$.

Se observa que para diferentes tamaños de la apertura, la cantidad de energía del anillo que la atraviesa es mayor o menor. Procederemos por lo tanto a investigar si para una mayor o menor cantidad de energía obtenemos un mejor o peor patrón de difracción, es decir, si podemos distinguir con mayor claridad los máximos de los mínimos para que resulte más fácil contarlos.

2.1.3. Búsqueda del tamaño óptimo de apertura.

Hemos observado que para distintos tamaños de apertura la cantidad de energía contenida en los anillos que pasa a través de esta es diferente. Para buscar como varía el patrón de difracción en función del lado del triángulo, en este caso de la variable η .

Estudio del tamaño de la apertura triangular para $\ell = 3$.

En el modo con OAM $\ell = 3$ y momento radial $p = 0$ hemos realizado distintas gráficas en función de η para poder analizar de una forma objetiva lo que ocurre en la pantalla situada en el régimen de Fraunhofer cuando varía su valor. Este modo nos permitirá ver mejor lo que ocurre al tener un mayor número de máximos en el patrón de difracción. En la figuras 10 y 11 analizamos el patrón de difracción obtenido para distintos η : a) el patrón de difracción, b) la intensidad a lo largo del plano xy del haz al atravesar la apertura triangular, para distintos valores de η : (primera fila) $\eta = 1,3880$, (segunda fila) $\eta = 1,8779$ y (tercera fila) $\eta = 2,0412$.

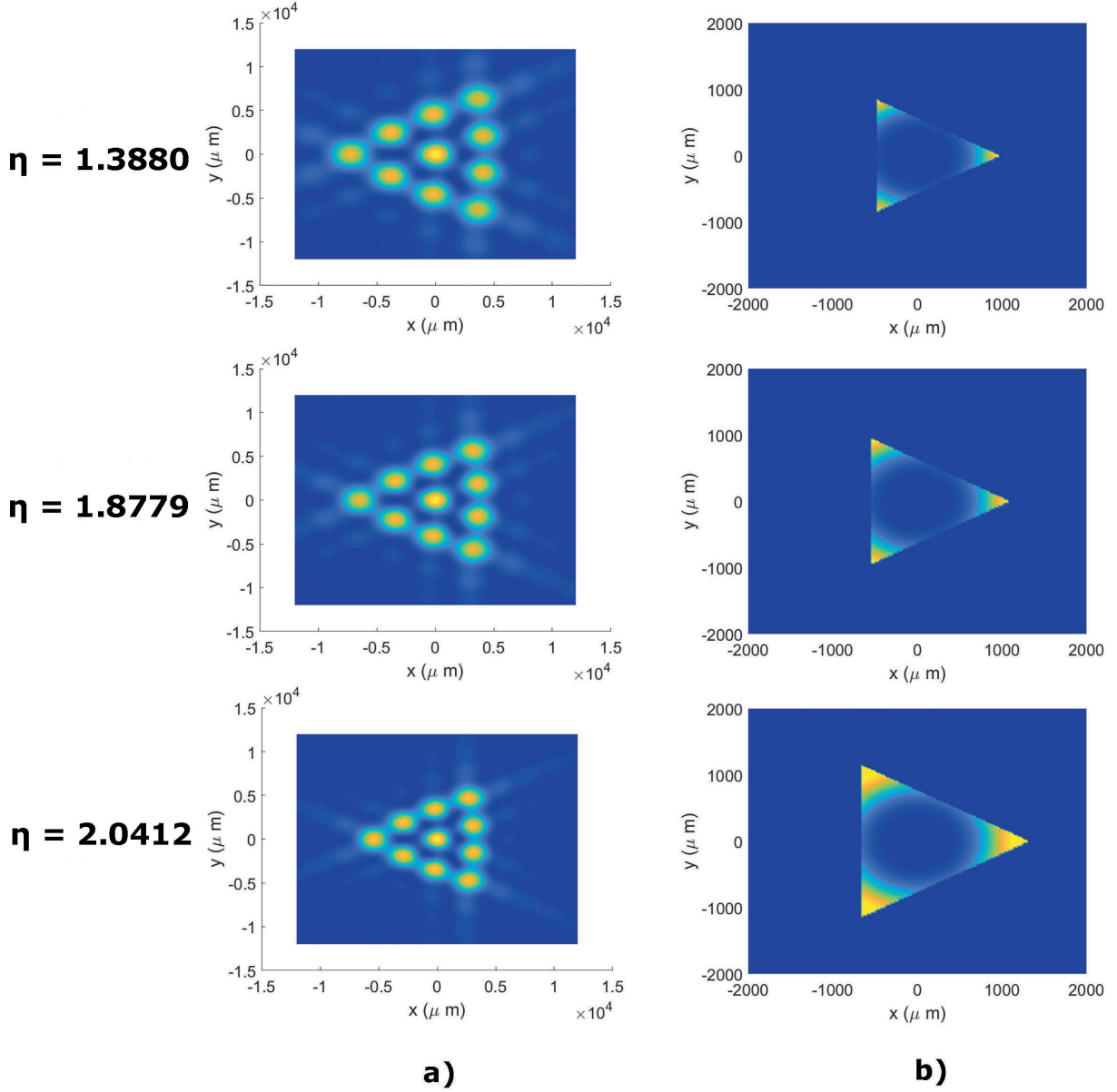


Figura 10: Para un haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 3$ y aperturas que cumplen la relación indicada en la columna de la izquierda vemos: a) el patrón de difracción, b) la intensidad a lo largo del plano xy del haz al atravesar la apertura triangular, para distintos valores de η : (primera fila) $\eta = 1,3880$, (segunda fila) $\eta = 1,8779$ y (tercera fila) $\eta = 2,0412$.

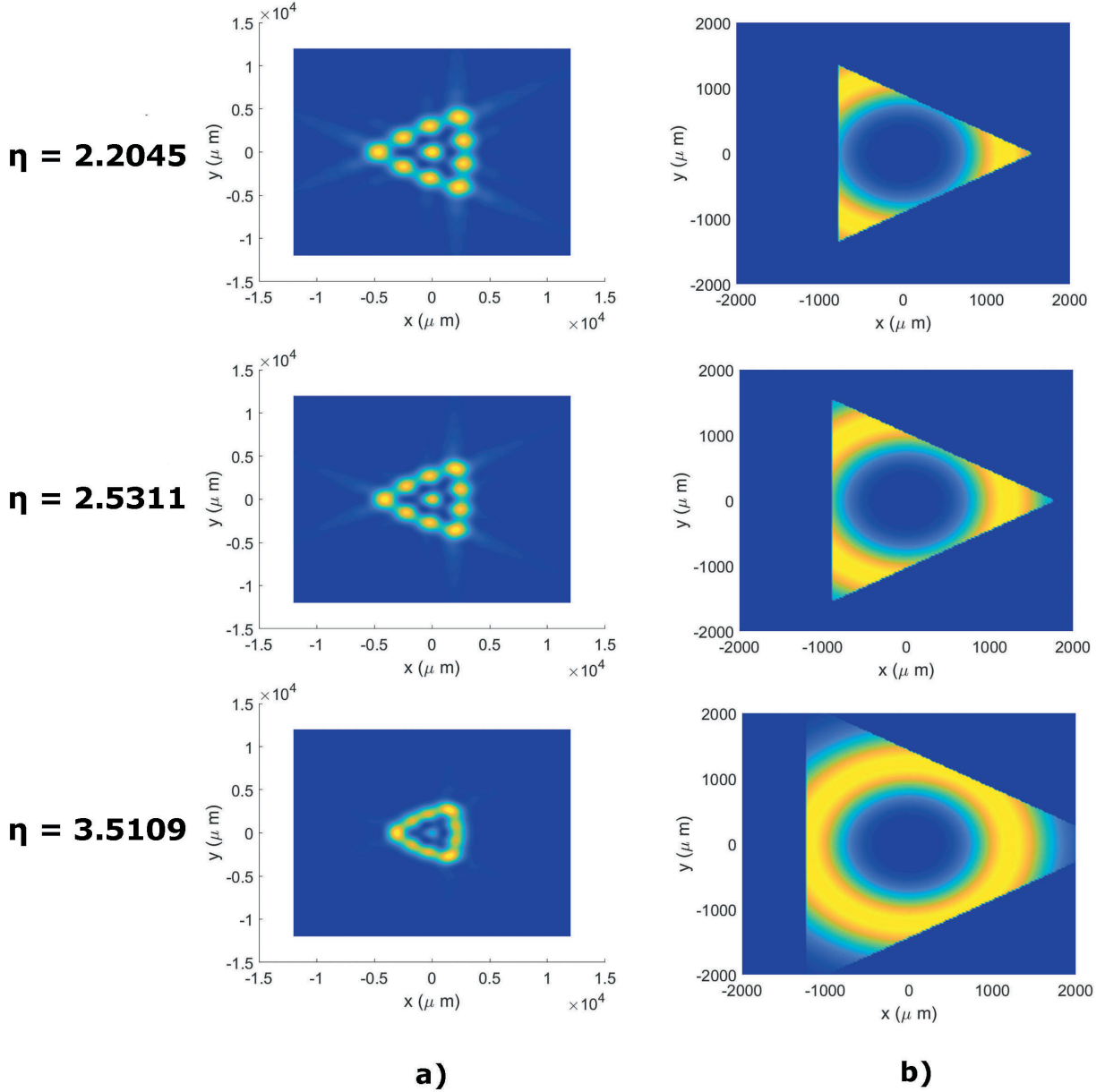


Figura 11: Para un haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 3$ y aperturas que cumplen la relación indicada en la columna de la izquierda vemos: a) el patrón de difracción, b) la intensidad a lo largo del plano xy del haz al atravesar la apertura triangular, para distintos valores de η : (primera fila) $\eta = 2,2045$, (segunda fila) $\eta = 2,5311$ y (tercera fila) $\eta = 3,5109$.

Podemos observar que para una mayor cantidad del anillo atravesando la apertura, más intensos son los máximos de difracción en los vértices del triángulo. Por el contrario, para aperturas más pequeñas es más intenso sobre todo el máximo central.

Para visualizar mejor este patrón, realizamos la integral de la intensidad del campo eléctrico en primer lugar a lo largo del eje y para analizar como es el perfil de intensidad del campo eléctrico en el lado del triángulo difractado como se muestra en la figura 12 (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η):

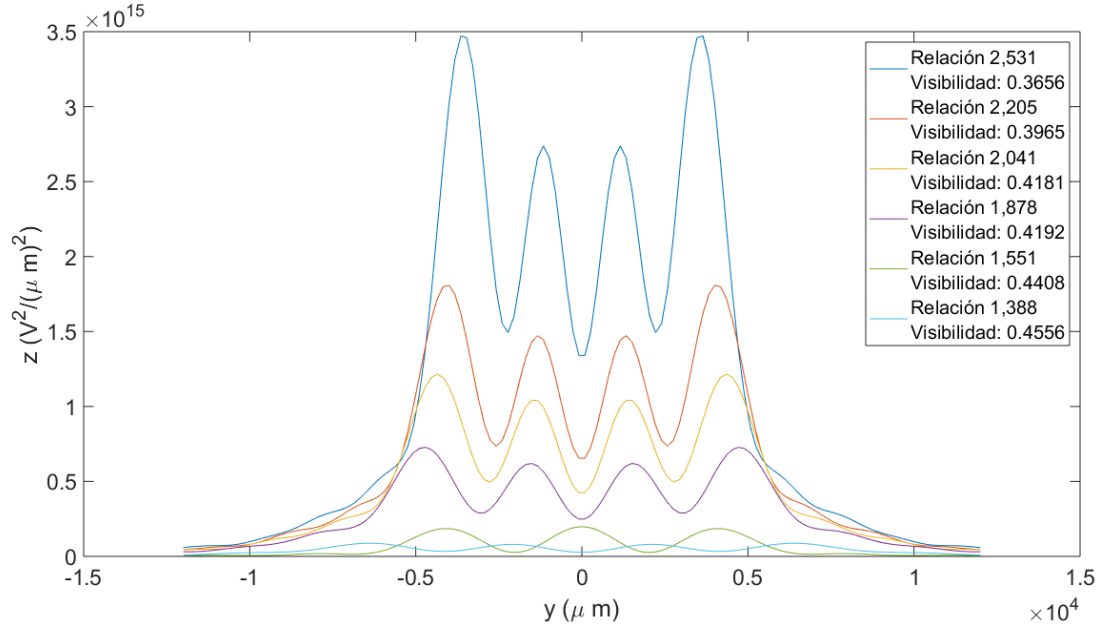


Figura 12: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x para distintos tamaños de la apertura en la zona del lateral del triángulo (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

Definimos la variable Visibilidad como:

$$Visibilidad = \frac{I_{maximos} - I_{minimos}}{I_{maximos} + I_{minimos}}$$

Esta variable disminuye muy poco a medida que aumentamos las dimensiones del triángulo.

También estudiamos el patrón de intensidad del lateral del triángulo del haz difractado, y estudiamos la relación entre los máximos en los vértices respecto a la de los máximos situados en el centro (como se muestra más adelante en la figura 15).

En una tabla analizamos la diferencia que se produce entre el menor máximo de intensidad y el mayor mínimo de intensidad:

Base (μm)	Visibilidad	Máximo central	Máximo lateral	Relación entre máximos
1700	0,4556	$2,77 \cdot 10^{14}$	$3,50 \cdot 10^{14}$	1,2621
1900	0,4408	$6,32 \cdot 10^{14}$	$8,85 \cdot 10^{14}$	1,4012
2300	0,4192	$2,01 \cdot 10^{15}$	$2,87 \cdot 10^{15}$	1,4294
2500	0,4181	$3,18 \cdot 10^{15}$	$4,83 \cdot 10^{15}$	1,5183
2700	0,3965	$4,52 \cdot 10^{15}$	$6,88 \cdot 10^{15}$	1,5225
3100	0,3656	$7,92 \cdot 10^{15}$	$1,30 \cdot 10^{16}$	1,6370

Y realizamos gráficas en las figuras 13 y 14 donde representamos la intensidad frente a la visibilidad y el cociente entre los máximos laterales y el máximo central frente a la visibilidad:

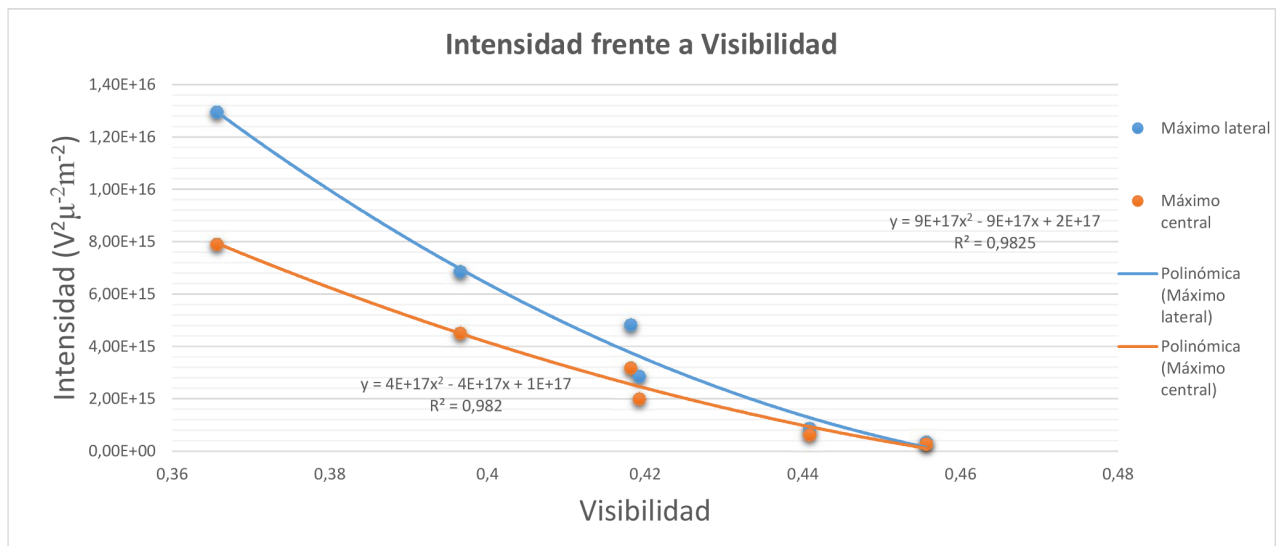


Figura 13: Representación del perfil de intensidad del patrón de difracción en una pantalla situada a 7 m de los máximos laterales (línea azul) y los máximos centrales (línea naranja) frente a la visibilidad para los distintos tamaño de apertura.

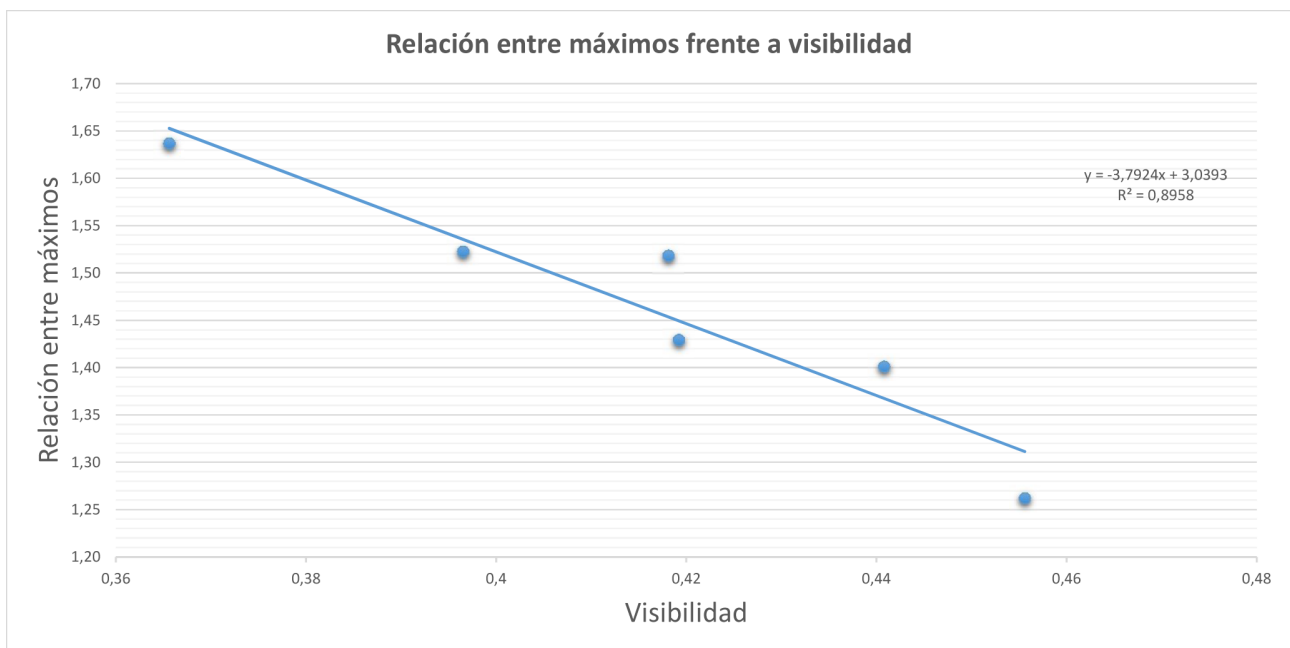


Figura 14: Representación del cociente entre los máximos laterales y el máximo central del perfil de intensidad del patrón de difracción en una pantalla situada a 7 m frente a la visibilidad para los distintos tamaño de apertura.

Observamos que a medida que aumenta el tamaño de la apertura (menor visibilidad) aumenta la intensidad de los máximos y al hacer esta más pequeña disminuye, lo cual es lógico debido a que una menor cantidad de energía la atraviesa y se difracta.

Sabemos que debemos buscar un término medio entre una buena visibilidad y una intensidad óptima, pero no sabemos con claridad que tamaño de apertura usar. Para ello estudiaremos el patrón de difracción de los máximos centrales, integrando la intensidad a lo largo del eje x en la zona central como observa en la figura 15 (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η):

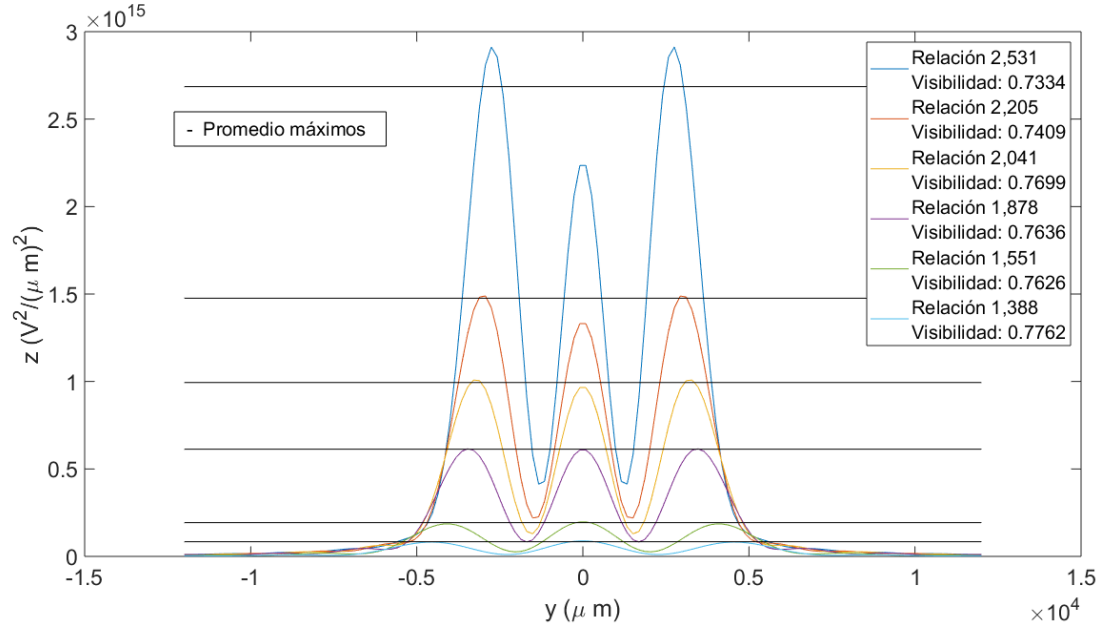


Figura 15: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x en la zona central para distintos tamaños de la apertura (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

Vemos que la relación más optima la encontramos para un triángulo de base $2,3 \cdot 10^3 \mu m$.

Si para las mismas relaciones en vez de modificar el tamaño de la apertura modificamos la anchura del haz W_0 , obtenemos lo siguiente: En la figura 16 vemos el patrón de intensidad del haz difractado integrado a lo largo del eje x y en la figura 17 el mismo patrón integrado en el eje x pero en la zona central del triángulo (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

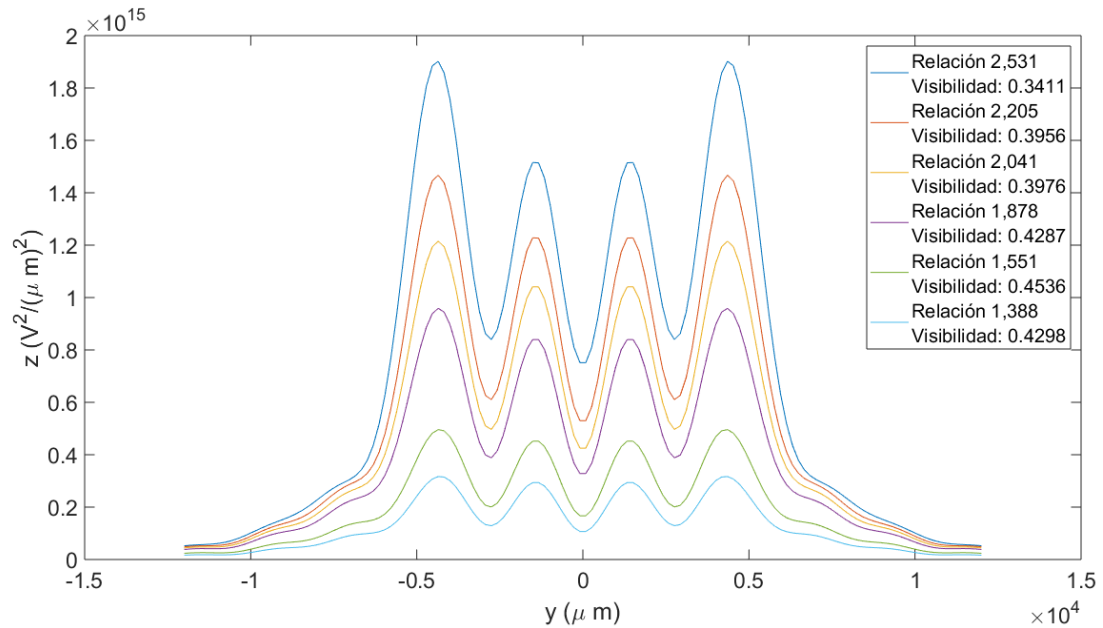


Figura 16: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x variando W_0 en la zona del lateral del triángulo (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

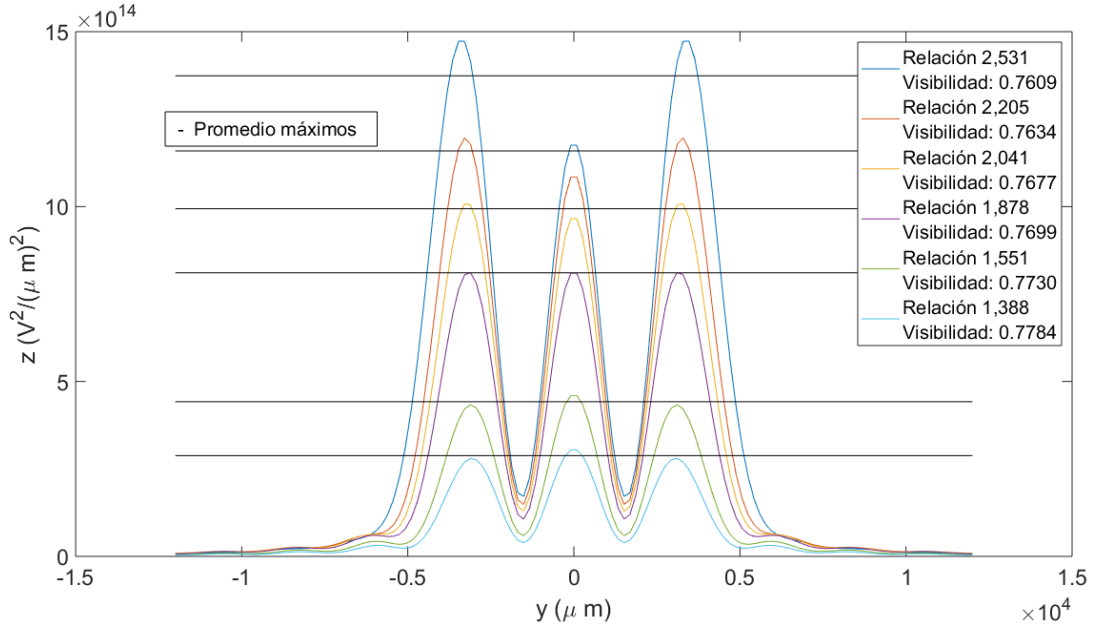


Figura 17: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x en la zona central variando W_0 (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

En las comparaciones realizadas con el tamaño de apertura constante pero variando la anchura del haz, obtenemos los mismos patrones que modificando el tamaño de la rendija pero con una diferencia en los patrones de intensidad más pequeña. Podemos obtener como se relacionan el radio del máximo R_{Max} y el radio del haz que atraviesa la apertura ($R_{triangulo}$): $R_{triangulo} = \frac{h}{3}$. Donde h es la altura del triángulo y hemos escogido un triángulo equilátero, que cumple las relaciones que se aprecian en la figura 18:

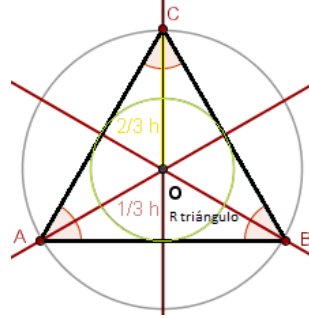


Figura 18: Centro de un triángulo equilátero.

Para el triángulo de base $2,3 \cdot 10^3 \mu m$, tenemos un valor $R_{triangulo} \simeq 663,95 \mu m$. El cociente entre estas dos magnitudes nos da: $\frac{R_{Max}}{R_{triangulo}} = 1,8446$

Para $\ell = 2$, entonces deberíamos tener un tamaño óptimo de rendija para una base de aproximadamente $1,9 \cdot 10^3 \mu m$.

Estudio del tamaño de la apertura triangular para $\ell = 2$.

A continuación vamos a hacer el mismo análisis pero para el modo $\ell = 2$. En las figuras 19 y 20 presentamos para $\eta = 0,9798$, $\eta = 1,3880$, $\eta = 0,9798$, $\eta = 1,5513$, $\eta = 2,0412$: a) el patrón de difracción, b) el haz atravesando la apertura visto en su sección en el plano xy y c) integral de las intensidades en el patrón de difracción.

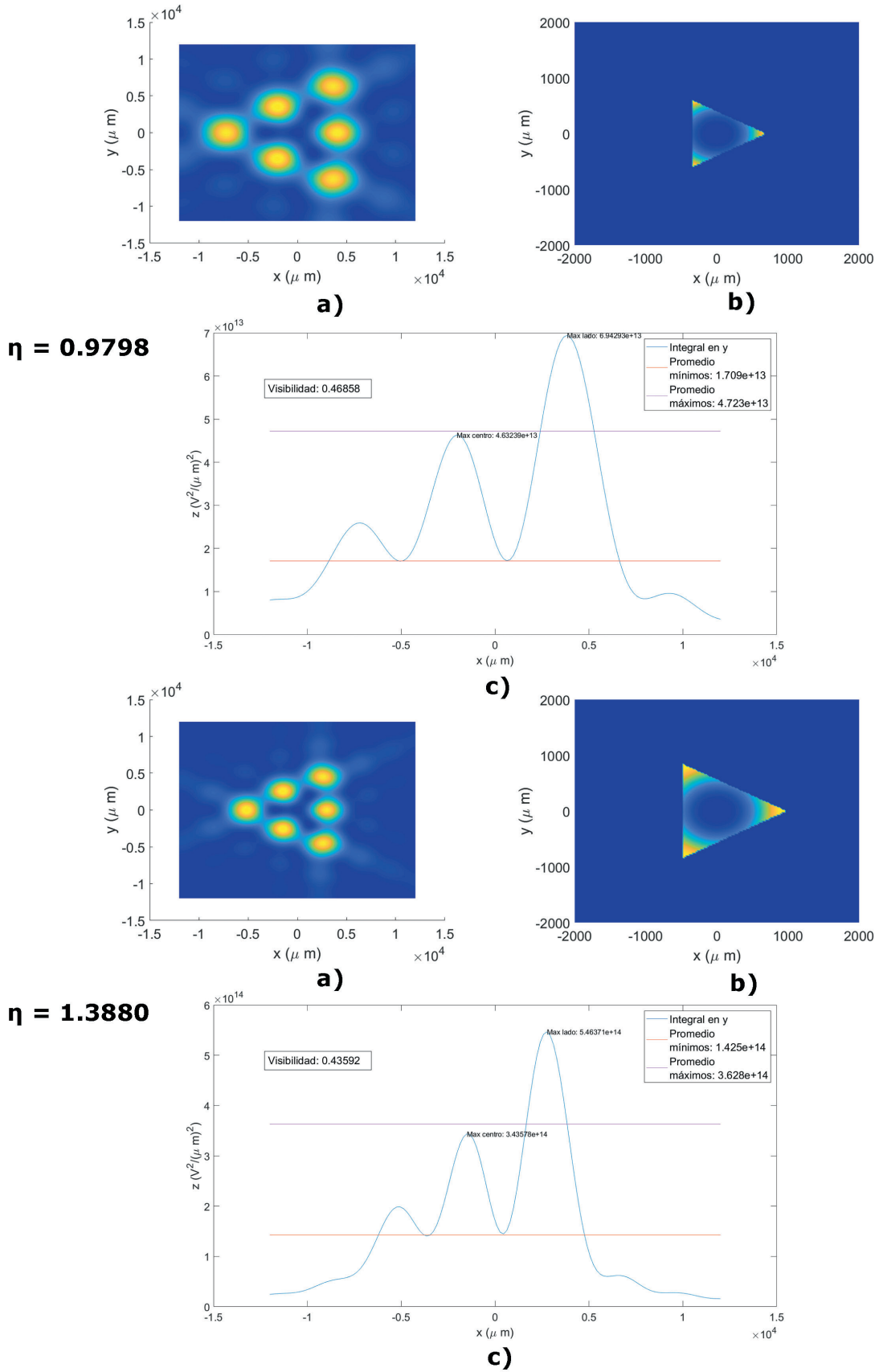


Figura 19: Haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 2$ y $p = 0$: a) el patrón de difracción, b) el haz atravesando la apertura visto en su sección en el plano xy y c) integral de las intensidades en el patrón de difracción.

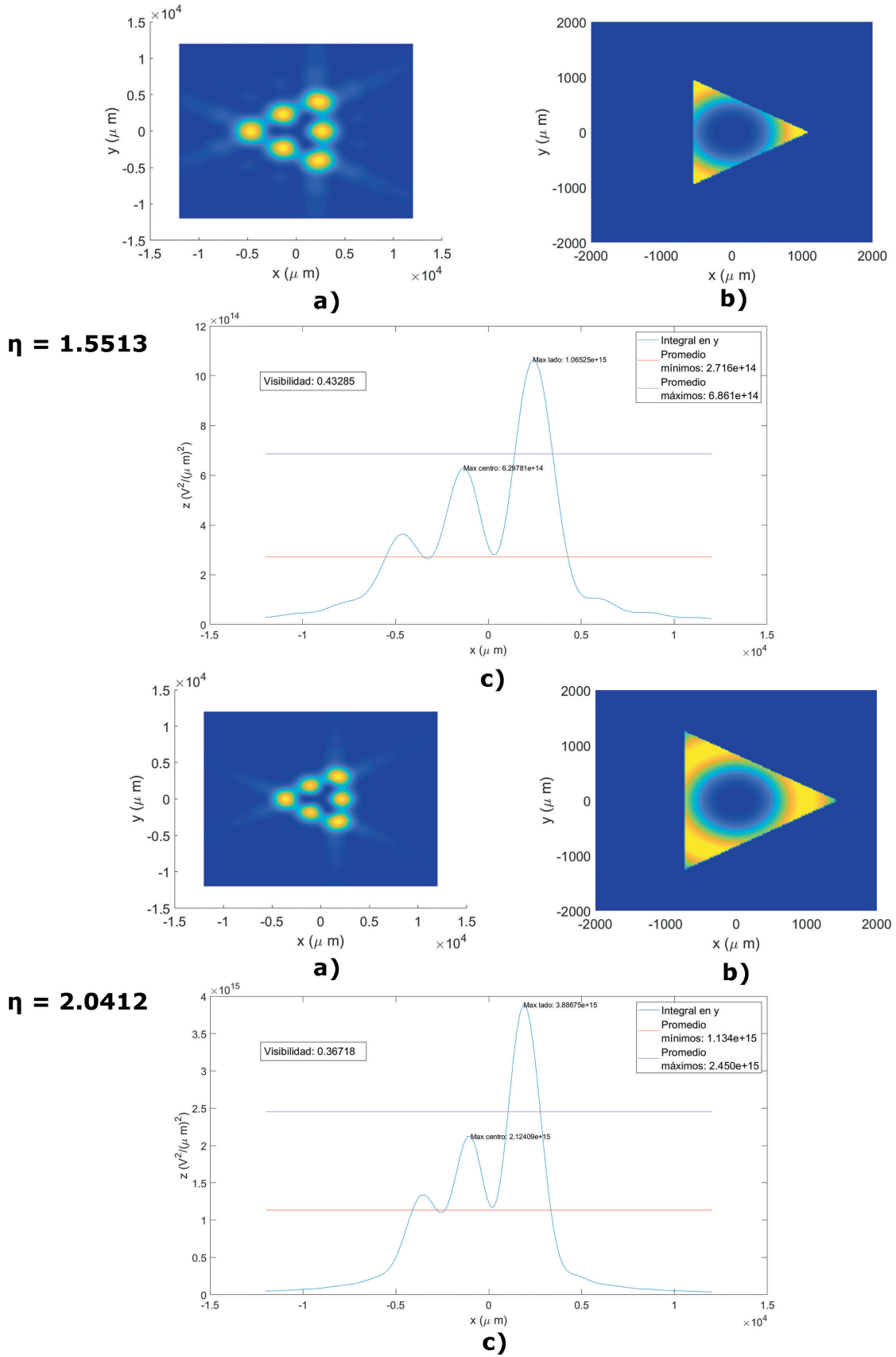


Figura 20: Haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 2$ y $p = 0$: a) el patrón de difracción, b) el haz atravesando la apertura visto en su sección en el plano xy y c) integral de las intensidades en el patrón de difracción.

En las figuras 20 y 21 representamos la integración de la intensidad en en patrón de difracción

a lo largo del eje x , en todo el patrón y en la zona central de este (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

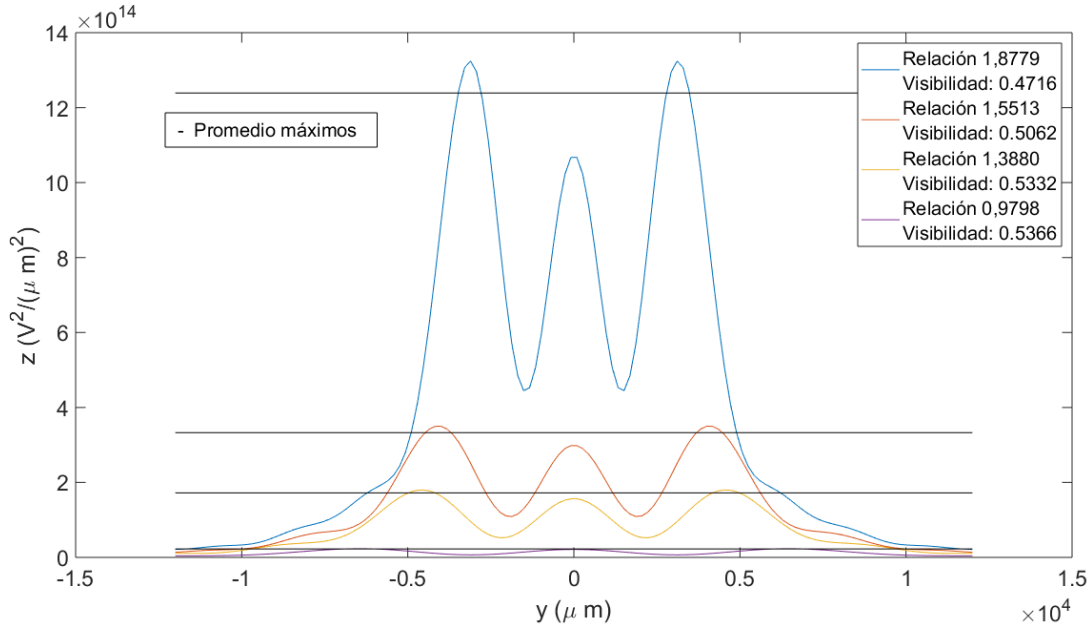


Figura 21: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x para distintos tamaños de apertura (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

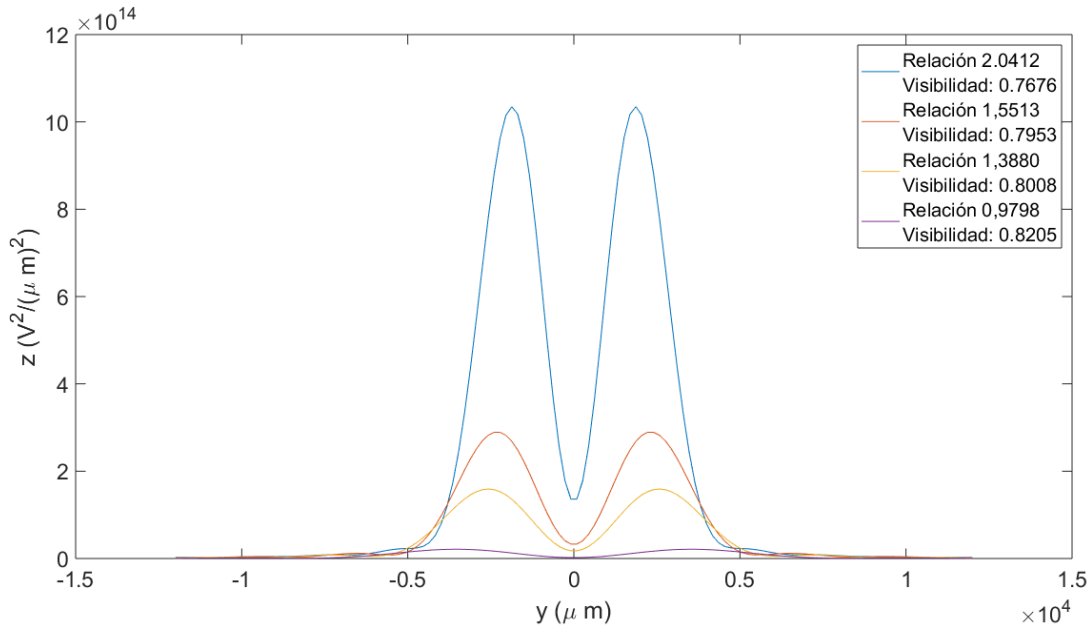


Figura 22: Intensidad del haz difractado en la pantalla integrada a lo largo del eje x en la zona central para distintos tamaños de apertura (el parámetro Relación indicado en la leyenda es la variable η).

Vemos que cuanto más pequeña es la apertura menor es la intensidad de los máximos, pero la visibilidad es ligeramente mayor y hay mayor cantidad de "ruido" en el patrón de difracción. Cuando más grande es la apertura tenemos mayor intensidad, pero observamos que los máximos en los vértices son más intensos que los que están en el centro de las caras. Podemos pensar que el tamaño óptimo está en un término medio entre ambos extremos, que tenga

una buena intensidad y que todos los máximos sean aproximadamente igual de intensos. Los resultados obtenidos para una Relación de 1,3880 y 1,5513 son muy similares y parecen ser los que más se aproximan a un caso óptimo, sin embargo no podemos concluir que la relación con el radio del máximo mencionada en el caso $\ell = 3$ nos proporcione el tamaño óptimo en este caso.

Estudio del tamaño de la apertura triangular para $\ell = 1$.

En el caso de $\ell = 1$, hemos hecho los mismos estudios pero no podemos sacar ninguna conclusión acerca del tamaño de la apertura porque únicamente hay tres máximos de difracción y como consecuencia disponemos de menos información para poder hacer el análisis que realizamos en los apartados anteriores para mayor OAM. En la figura 23 mostramos para $\eta = 0,9798$ (primera imagen), $\eta = 1,5513$ (segunda imagen) y $\eta = 2,5311$ (tercera imagen): a) el patrón de difracción, b) el haz atravesando la apertura visto en su sección en el plano xy y c) integral de las intensidades en el patrón de difracción.

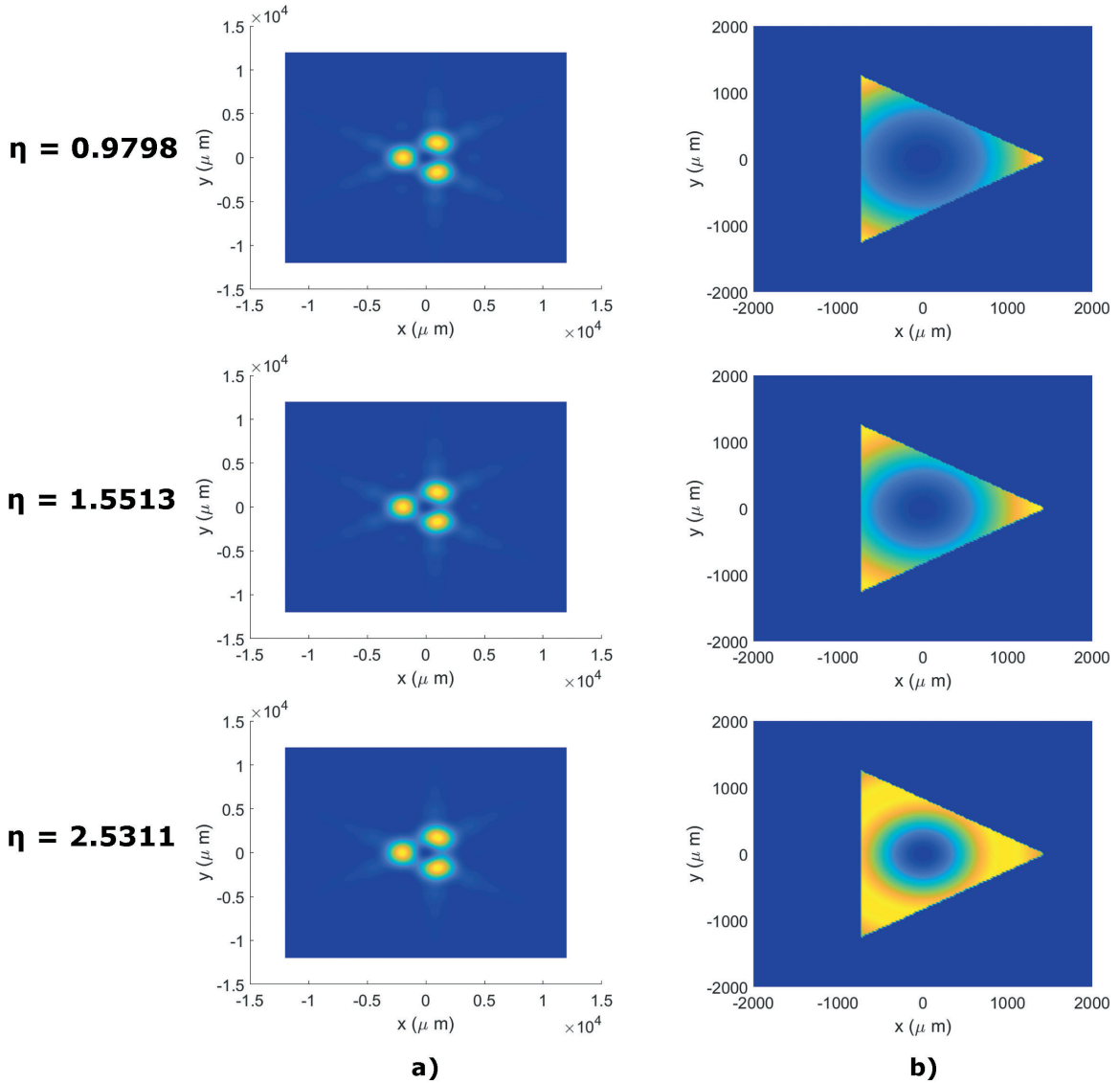


Figura 23: Haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 1$ y $p = 0$ para $\eta = 0,9798$ (primera imagen), $\eta = 1,5513$ (segunda imagen) y $\eta = 2,5311$ (tercera imagen): a) el patrón de difracción, b) el haz atravesando la apertura visto en su sección en el plano xy .

Como para el caso en que $\ell = 1$ el tamaño de la apertura no afecta demasiado al patrón de

difracción (en los casos extremos en los que la apertura sea mucho más pequeña o mucho mas grande afecta, pero no en tamaños intermedios). Vamos a escoger de aquí en adelante una η media que sea óptima para los ℓ mayores: $\eta = 1,8779$.

2.2. Apertura circular.

En esta sección haremos que un haz de Laguerre-Gauss atraviese una apertura de forma circular para estudiar si con este método se puede discernir el OAM. Hemos realizado las simulaciones con aperturas circulares del mismo radio del radio del máximo del haz, para así en todas poder analizar la misma cantidad de energía difractada.

En las figuras 24 y 25 se analiza para $\eta = 1,8779$ y $\ell = 1$ (primera imagen de la figura 24), $\ell = 2$ (segunda imagen de la figura 24), $\ell = 3$ (primera imagen de la figura 25) y $\ell = 4$ (segunda imagen de la figura 25: a) el patrón de difracción y b) el haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy).

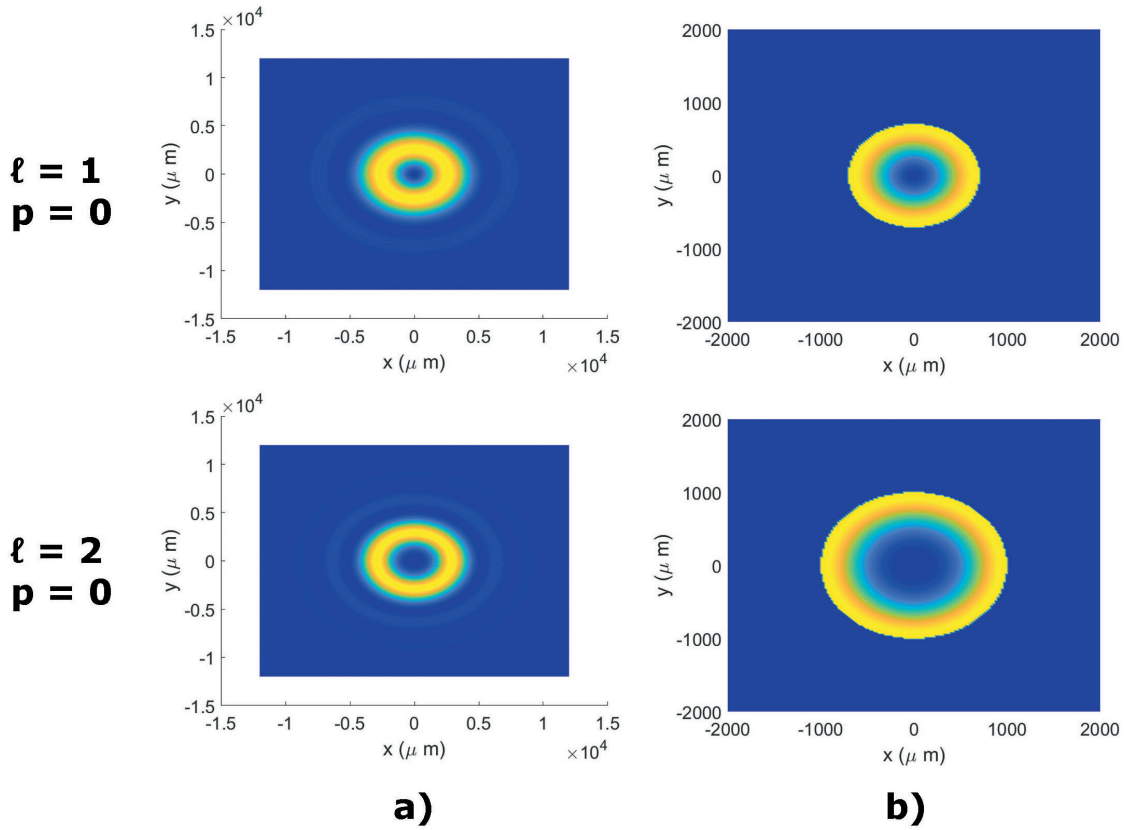


Figura 24: Para un Haz de Laguerre-Gauss para $\eta = 1,8779$, $p = 0$ y $\ell = 1$ (primera imagen) y $\ell = 2$ (segunda imagen): a) el patrón de difracción y b) el haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy).

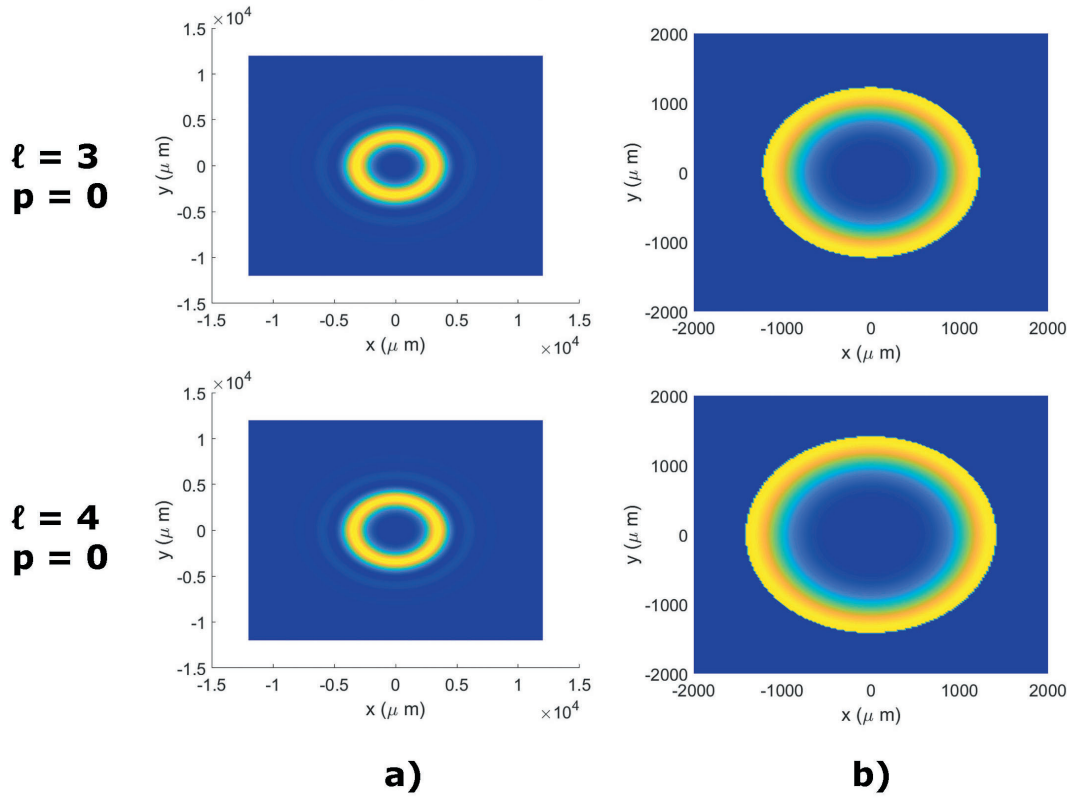


Figura 25: Para un Haz de Laguerre-Gauss para $\eta = 1,8779$, $p = 0$ y $\ell = 3$ (primera imagen) y $\ell = 4$ (segunda imagen): a) el patrón de difracción y b) el haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy).

Al utilizar la apertura circular, vemos que el patrón de difracción ya no presenta una serie de máximos como en la triangular. Por el contrario, presenta un anillo principal con una serie de anillos secundarios. A pesar de que inicialmente podíamos pensar que mediante la estructura e intensidad de estos anillos secundarios se podría caracterizar el OAM del haz incidente, tras estos resultados atendiendo a la baja intensidad de dichos anillos, nos hace desestimar la apertura circular como un método eficiente para distinguir haces con distinto ℓ .

2.3. Mezcla de modos.

Una vez hemos visto como se difracta un haz de Laguerre-Gauss para sus modos con $p = 0$ y distintos ℓ , vamos a realizar un estudio para ver si es posible identificar que valores de ℓ componen un haz que esté formado por una mezcla de modos con distinto valor de OAM y modo radial $p = 0$. Si un haz está compuesto por una suma de distintos modos, llevará una mezcla de momento angular orbital en su término de fase. Al conocer el patrón de difracción de cada valor de ℓ , estudiaremos como varía este patrón cuando el haz que incide sobre la apertura triangular tiene una mezcla de distintos ℓ .

2.3.1. Mezcla de modos con $\ell = 2$ y $\ell = 1$

El haz que incide sobre la apertura es una suma de dos haces de Laguerre-Gauss, uno con $\ell = 2$ y otro con $\ell = 1$. Veremos como cambia su patrón de difracción al modificar las proporciones de los haces que lo componen, es decir, cuando hay más cantidad de haz con $\ell = 1$ o $\ell = 2$ como se expone en las siguientes figuras 26, 27 y 28.

La figura 26 es una gráfica donde se compara el patrón de difracción integrado a lo largo del eje y y para distintas proporciones de los haces que componen el haz incidente sobre una apertura triangular (en la leyenda se identifica la carga topológica ℓ como L).

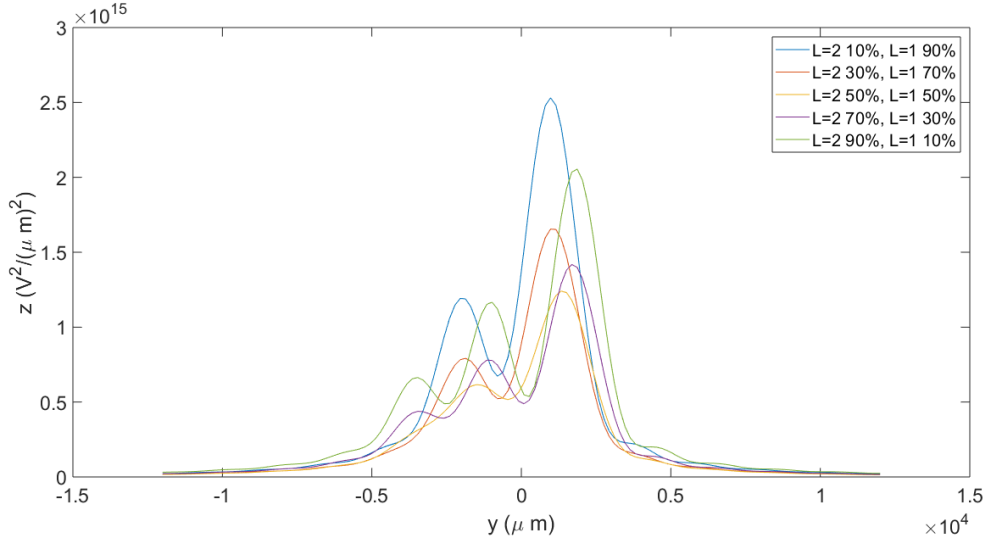


Figura 26: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ en distintas proporciones integrado a lo largo del eje y .

En las figuras 27 y 28 vemos para distintas proporciones de los modos que componen el haz: a) haz atravesando la apertura (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

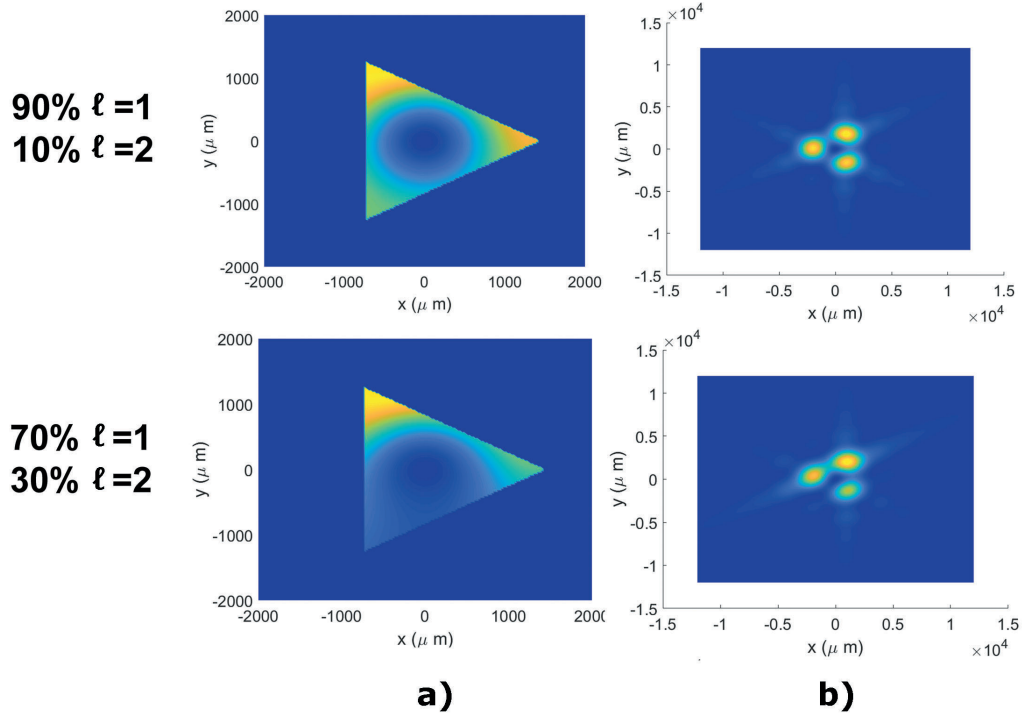


Figura 27: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

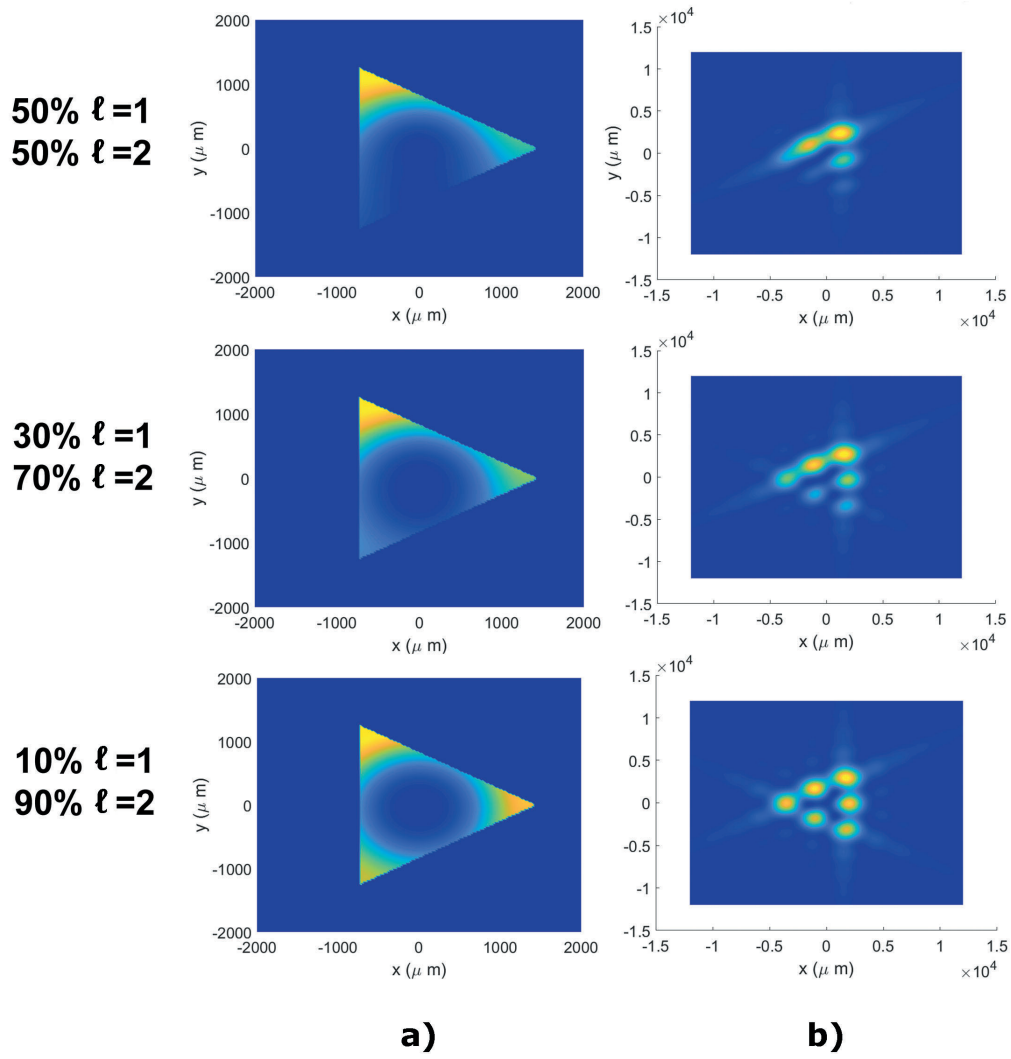


Figura 28: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

Dependiendo de la proporción, se puede ver cómo varía el patrón de difracción viendo que toma la forma del modo que predomina en el haz. También observamos que se concentra mayor cantidad de energía en el vértice superior derecho del patrón de difracción. El uso de la apertura triangular permite distinguir la mezcla de modos, aunque se necesitaría de un análisis meticuloso de los patrones de difracción (es decir, no simplemente mirar el número de máximos) para extraer la proporción entre los haces de OAM.

2.3.2. Mezcla de modos con $\ell = 3$ y $\ell = 1$

El haz que incide sobre la apertura ahora es una suma de dos haces de Laguerre-Gauss, uno con $\ell = 3$ y otro con $\ell = 1$. Al igual que antes, realizamos una gráfica se compara el patrón de difracción integrado a lo largo del eje y para distintas proporciones de los haces que componen el haz incidente sobre una apertura triangular.

La figura 29 es una gráfica donde se compara el patrón de difracción integrado a lo largo del eje y para distintas proporciones de los haces que componen el haz incidente sobre una apertura triangular (en la leyenda se identifica la carga topológica ℓ como L).

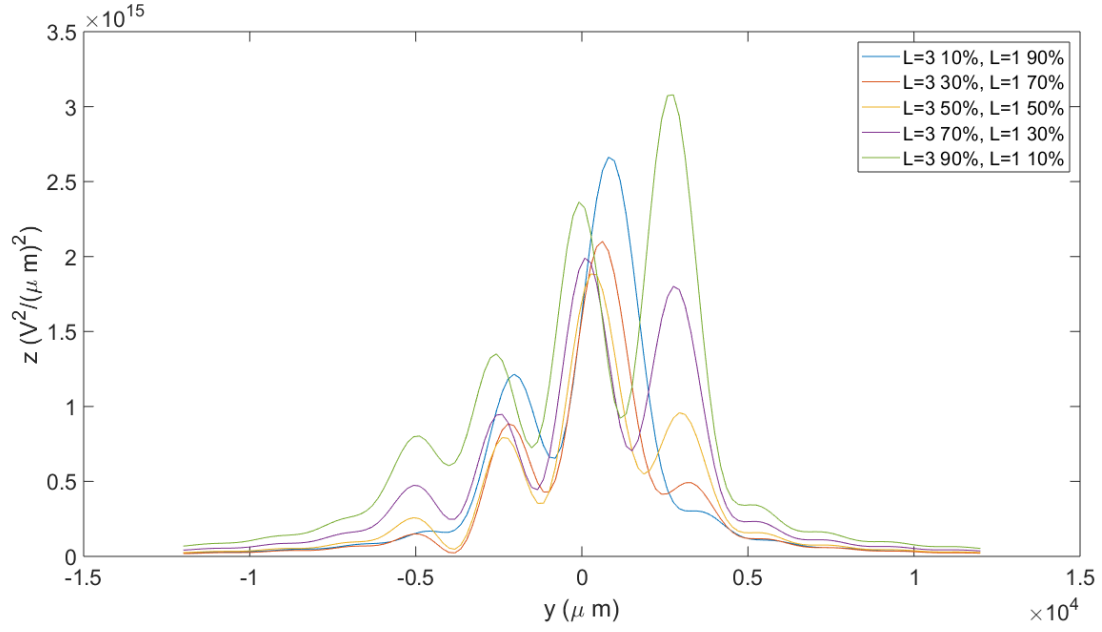


Figura 29: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 3$ y $\ell = 1$ en distintas proporciones integrado a lo largo del eje y .

En las figuras 30 y 31 vemos para distintas proporciones de los modos que componen el haz: a) haz atravesando la apertura (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

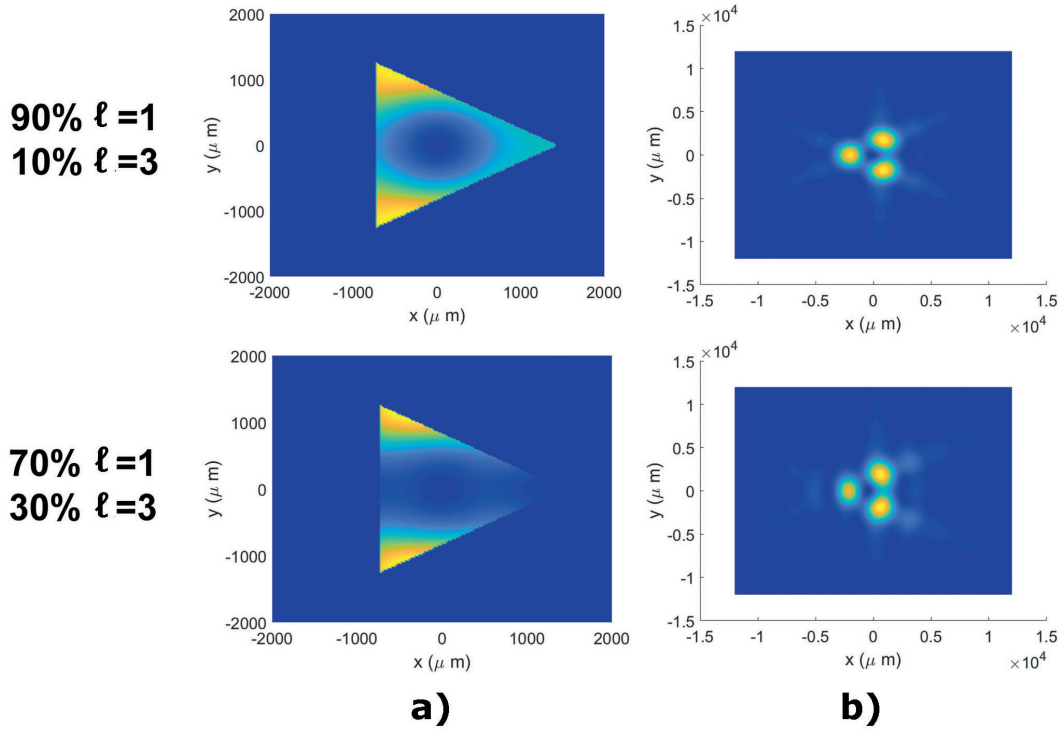


Figura 30: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 1$ y $\ell = 3$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

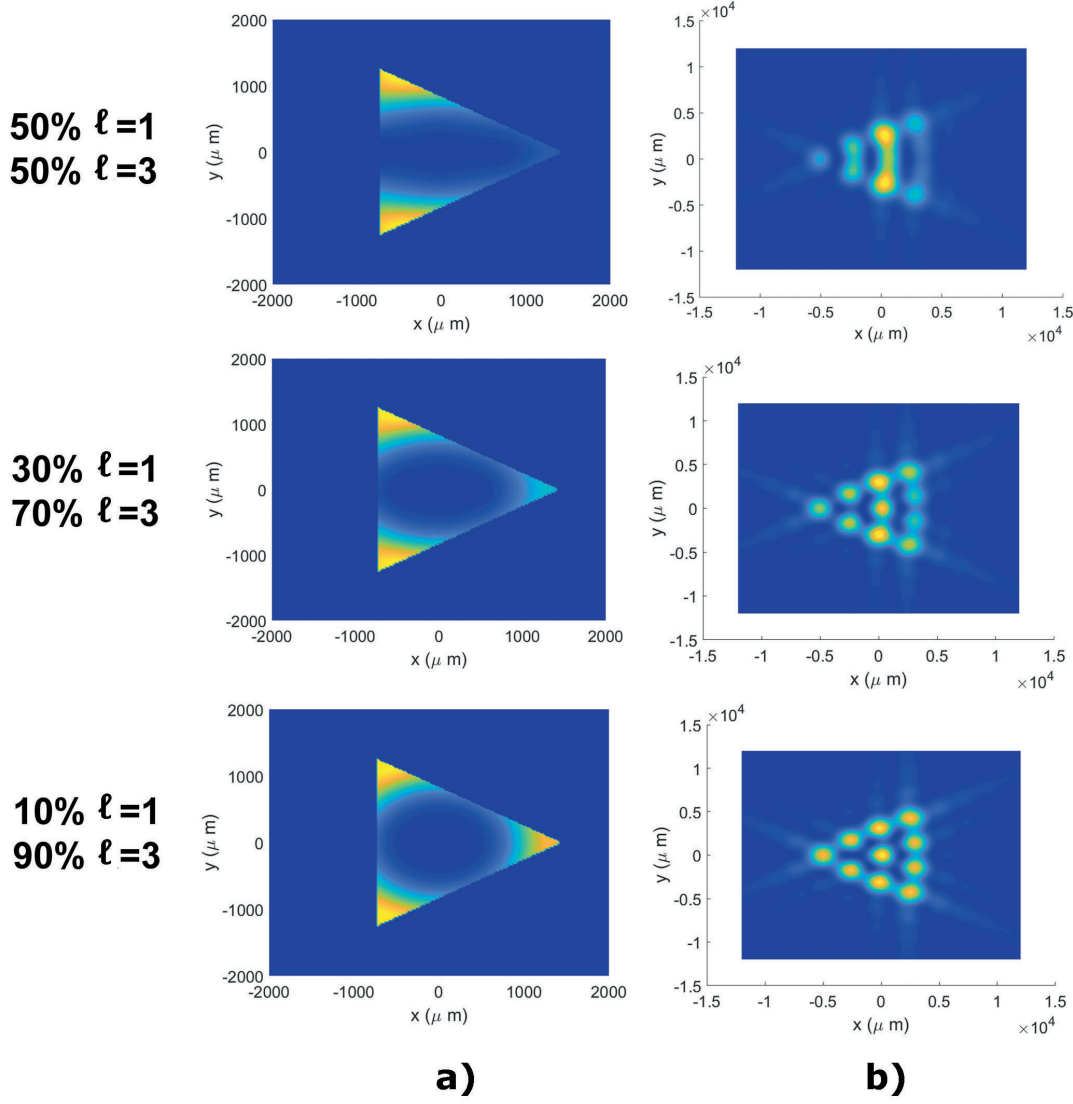


Figura 31: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 1$ y $\ell = 3$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

Igual que en el caso anterior, en función de la proporción, se puede ver cómo varía el patrón de difracción viendo que toma la forma del modo que predomina en el haz, pero se concentra mayor cantidad de energía en el centro del patrón de difracción. También necesitaría de un análisis más preciso de los patrones de difracción para extraer la proporción entre los haces de OAM ya que no se distingue a simple vista.

2.3.3. Mezcla de modos con $\ell = 2$ y $\ell = 3$

Por último, hacemos incidir un haz sobre la apertura que es una suma de dos haces de Laguerre-Gauss, uno con $\ell = 2$ y otro con $\ell = 3$. Como en los casos anteriores realizamos una gráfica se compara el patrón de difracción integrado a lo largo del eje y para distintas proporciones de los haces que componen el haz incidente sobre una apertura triangular. La figura 32 es una gráfica donde se compara el patrón de difracción integrado a lo largo del eje y para distintas proporciones de los haces que componen el haz incidente sobre una apertura triangular (en la leyenda se identifica la carga topológica ℓ como L).

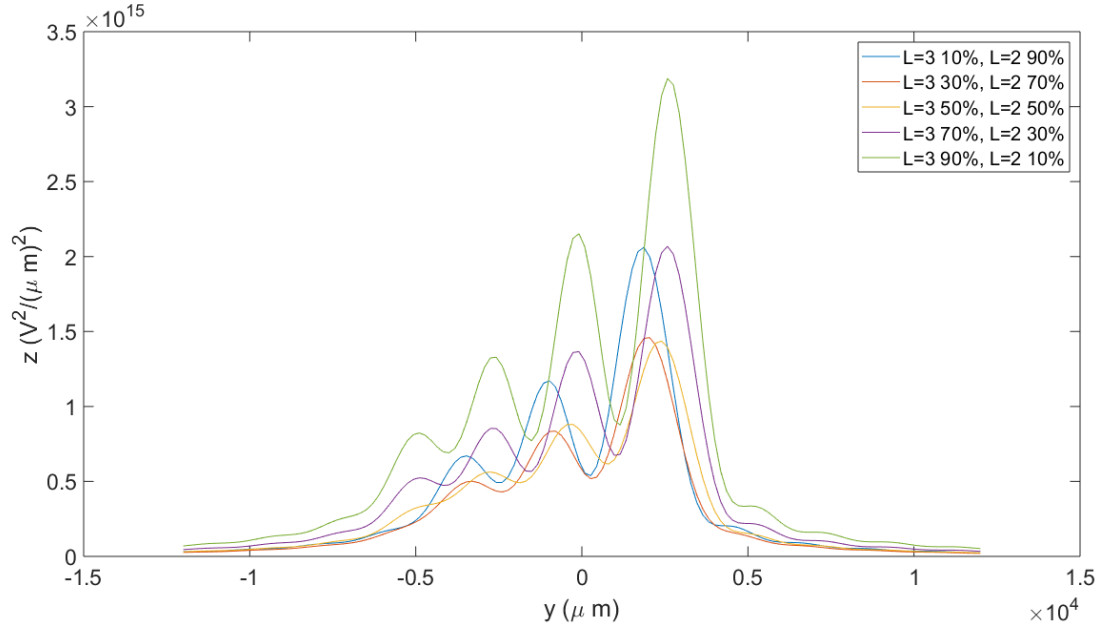


Figura 32: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 3$ y $\ell = 2$ en distintas proporciones integrado a lo largo del eje y .

En las figuras 33 y 34 vemos para distintas proporciones de los modos que componen el haz: a) haz atravesando la apertura (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

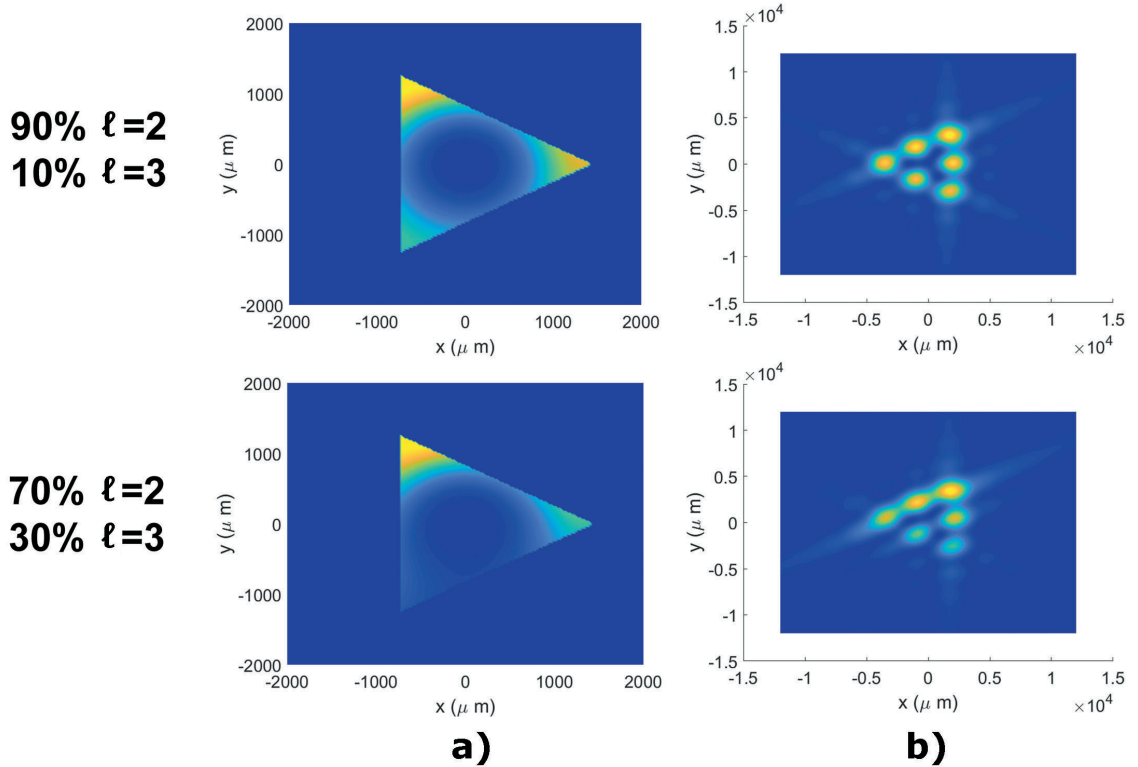


Figura 33: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 2$ y $\ell = 3$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

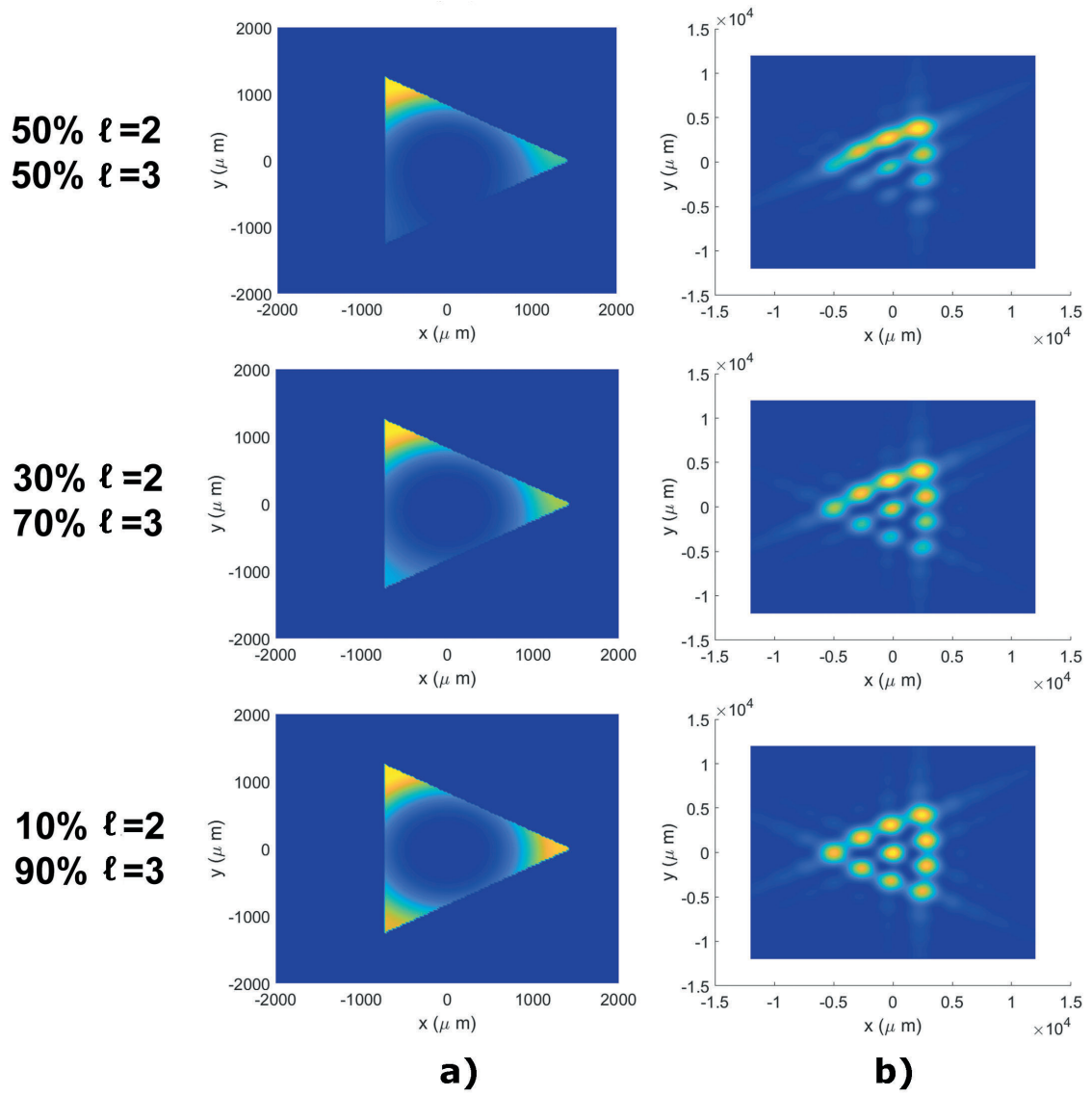


Figura 34: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y mezcla de dos modos con $\ell = 2$ y $\ell = 3$ en distintas proporciones: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción.

Observamos que el modo que domina (más de la mitad del haz está compuesto por este) es el que marca la cantidad de máximos que encontraremos al realizar la integral a lo largo del eje y , es decir, cuando hay mayor cantidad de haz con $\ell = 3$ encontraremos cuatro máximos, cuando esta pertenece al modo con $\ell = 2$ vemos tres máximos y mientras que para el que tiene $\ell = 1$ solamente observamos dos.

2.4. Caracterización de momentos angulares elevados.

Hemos observado en los apartados anteriores que la difracción a través de una apertura triangular efectivamente nos proporciona un número de máximos en el lado del triángulo difractado que es igual a $\ell + 1$, lo que nos proporciona un método de medida del OAM. A continuación nos planteamos cuál es el mayor OAM que es capaz de resolver esta técnica.

En la búsqueda del número máximo de momento angular que podemos resolver mediante este método de difracción a través de una apertura triangular encontramos que a medida que aumentamos el valor de ℓ , los patrones de difracción de los laterales del triángulo (los cuales

tienen como número de puntos $\ell+1$) van desapareciendo.

Observamos en la figura 35 los casos en los que aún se observa que el lateral tiene un número de máximos igual a $\ell+1$: a) para un $\ell = 7$ y b) para un $\ell = 15$

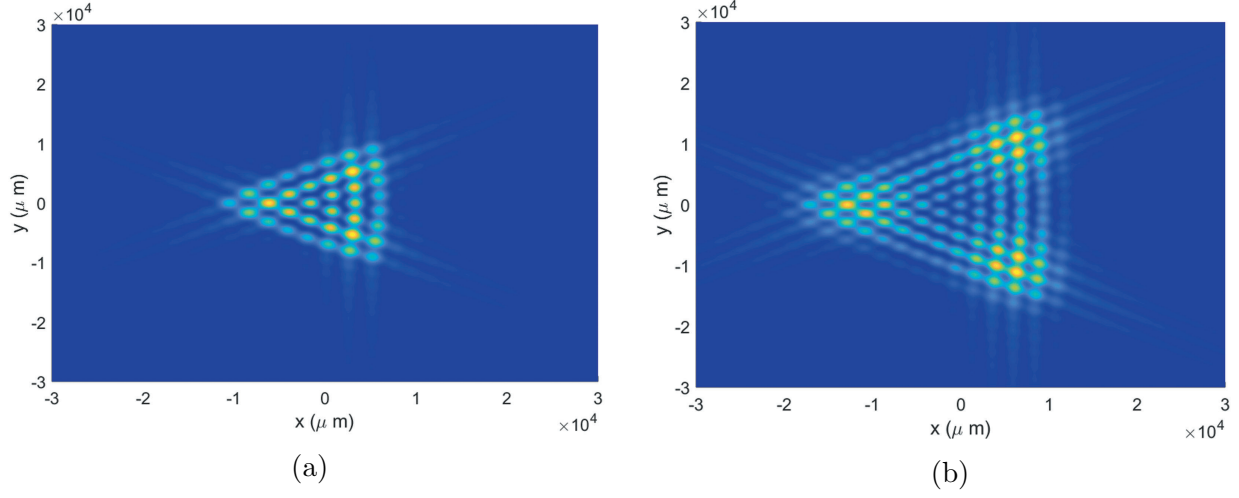


Figura 35: Patrón de difracción: a) $\ell = 7$ y b) $\ell = 15$.

Para un valor de $\ell = 19$ ya comenzamos a ver que todavía que se cumple pero los máximos de los vértices son muy tenues. Aumentando la resolución de nuestra máscara (el número de puntos N que tiene nuestra apertura), intentamos ver en la figura 36 si este máximo tan pequeño se aprecia mejor. En la imagen de la izquierda hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=500$. En la imagen de la derecha hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=150$.

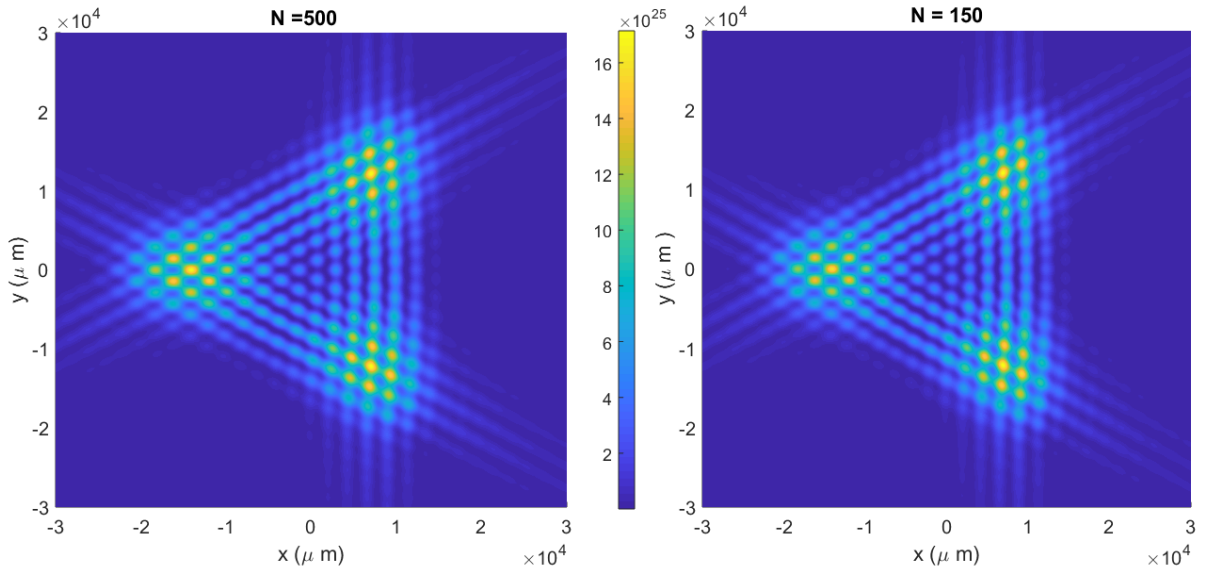


Figura 36: Patrón de difracción de un haz de Laguerre-Gauss con $\ell = 19$. En la figura de la izquierda hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=500$. En la figura de la derecha hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=150$.

Y haciendo zoom sobre uno de los vértices para ver lo que ocurre mejor en el patrón de difracción en esa zona vemos en la figura 37:

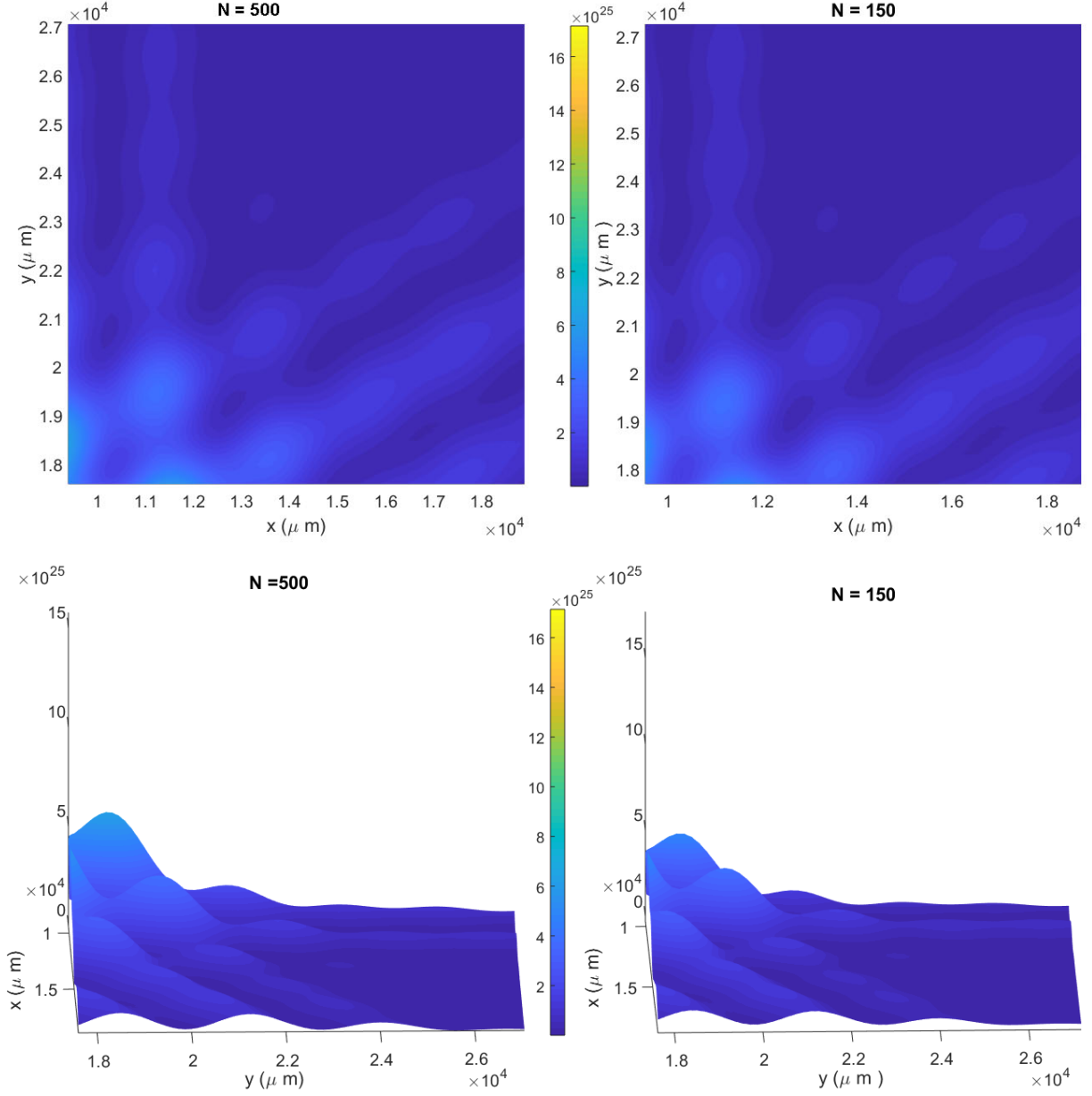


Figura 37: Zoom del patrón de difracción de un haz con $\ell = 19$. En las figuras de la izquierda hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=500$. En las figuras de la derecha hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=150$.

Para $\ell = 20$ esto ya no se cumple. El máximo tenue del vértice desaparece completamente y el método ya no es válido para valores superiores de OAM, como podemos observar en las figuras 38 y 39. En ellas se aprecia el patrón de difracción completo y en la zona del vértice (en la figura 39 con un zoom). En la imagen de la derecha hemos realizado la simulación con $N_x=N_y=N=150$ y en la imagen de la izquierda con $N_x=N_y=N=500$.

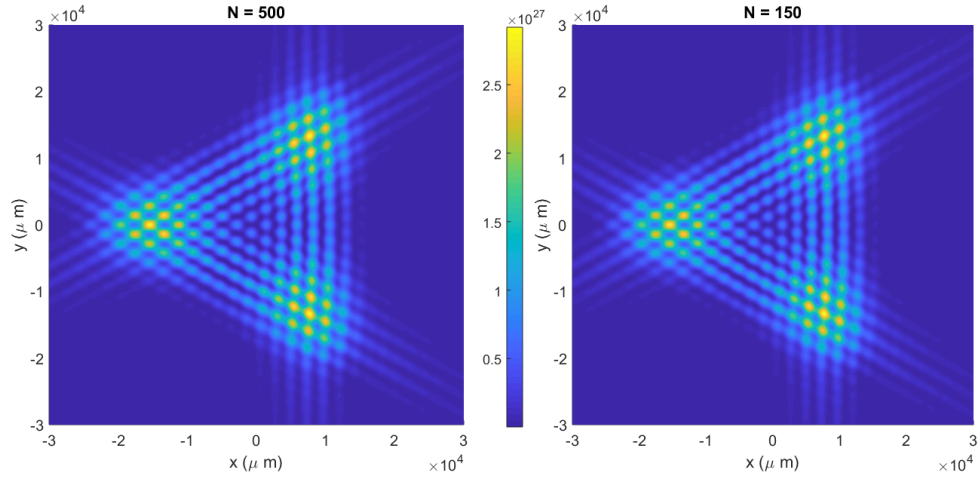


Figura 38: Patrón de difracción de un haz con $\ell = 20$. En la imagen de la izquierda hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=500$. En la imagen de la derecha hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=150$.

Hacemos zoom sobre uno de los vértices al igual que en el caso anterior:

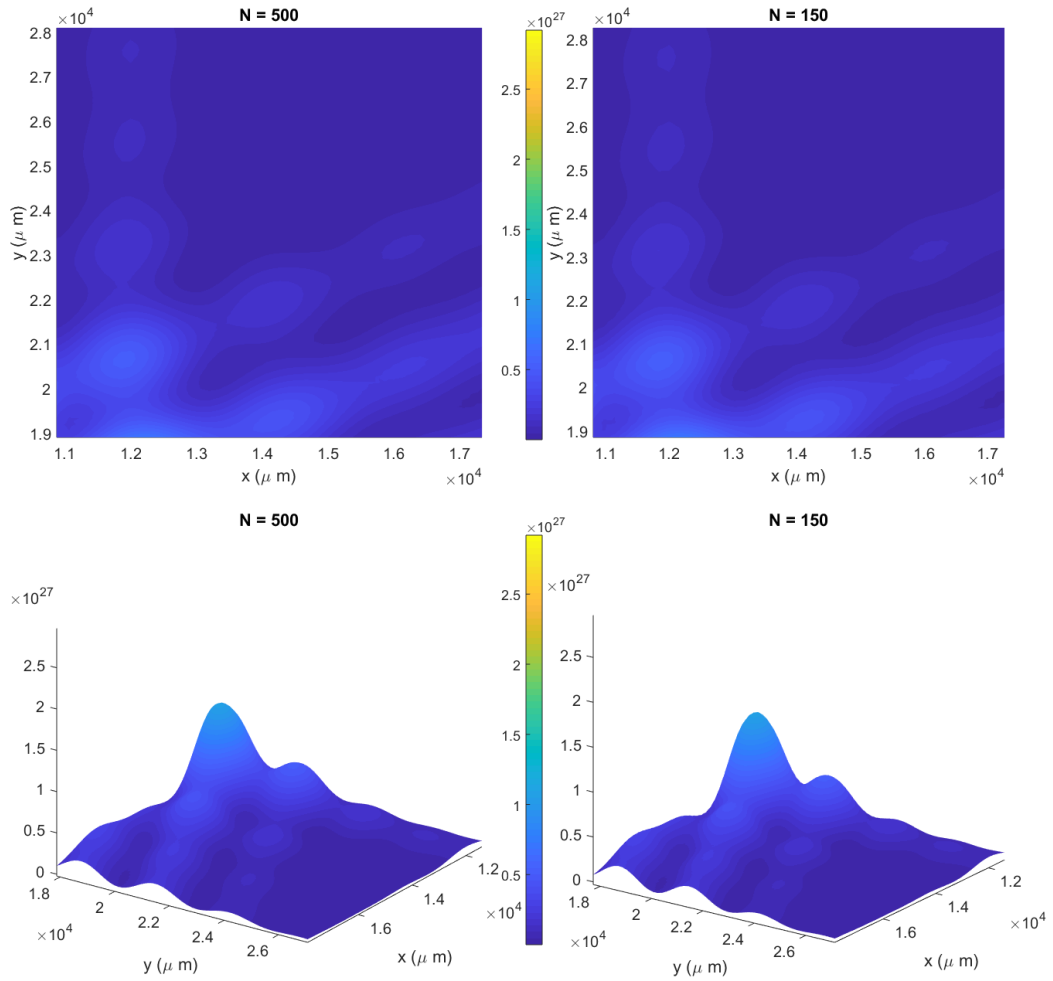


Figura 39: Zoom del patrón de difracción de un haz con $\ell = 20$. En las figuras de la izquierda hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=500$. En las figuras de la derecha hemos realizado la simulación con un numero de puntos $N_x=N_y=N=150$.

Para valores de OAM superiores a 20 ya no se cumple, como vemos con claridad en la figura 40 para un valor de $\ell = 25$.

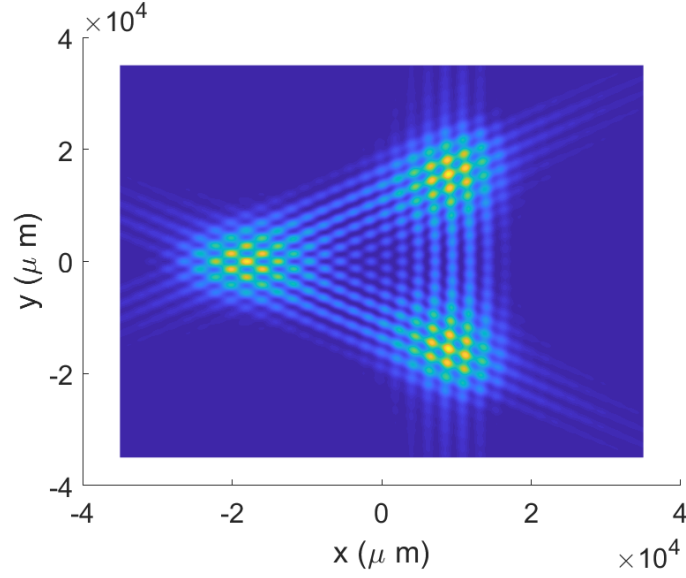


Figura 40: Patrón de difracción con $\ell = 25$.

Para ℓ muy grandes también desaparecen del triángulo difractado los máximos en la zona central, como se corrobora en la figura 41.

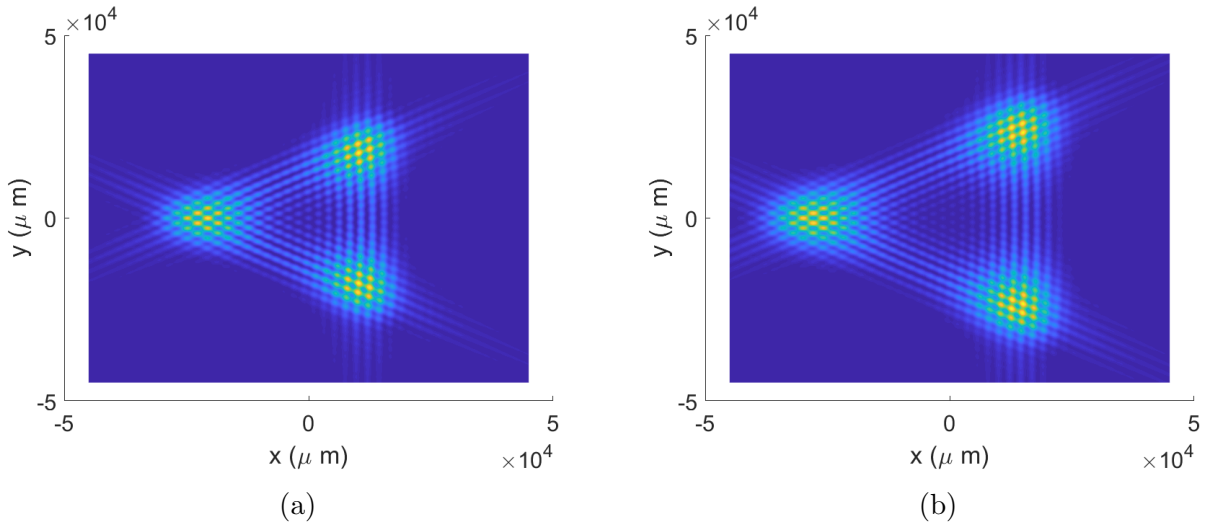


Figura 41: Patrón de difracción: a) haz con $\ell = 30$ y b) haz con $\ell = 40$.

Vemos y comparamos el patrón de fase de haces con carga topológica $\ell = 19$ y $\ell = 20$ en la figura 42 para intentar discernir alguna diferencia y obtener alguna explicación del por qué para $\ell = 20$ ya no distinguimos el máximo.

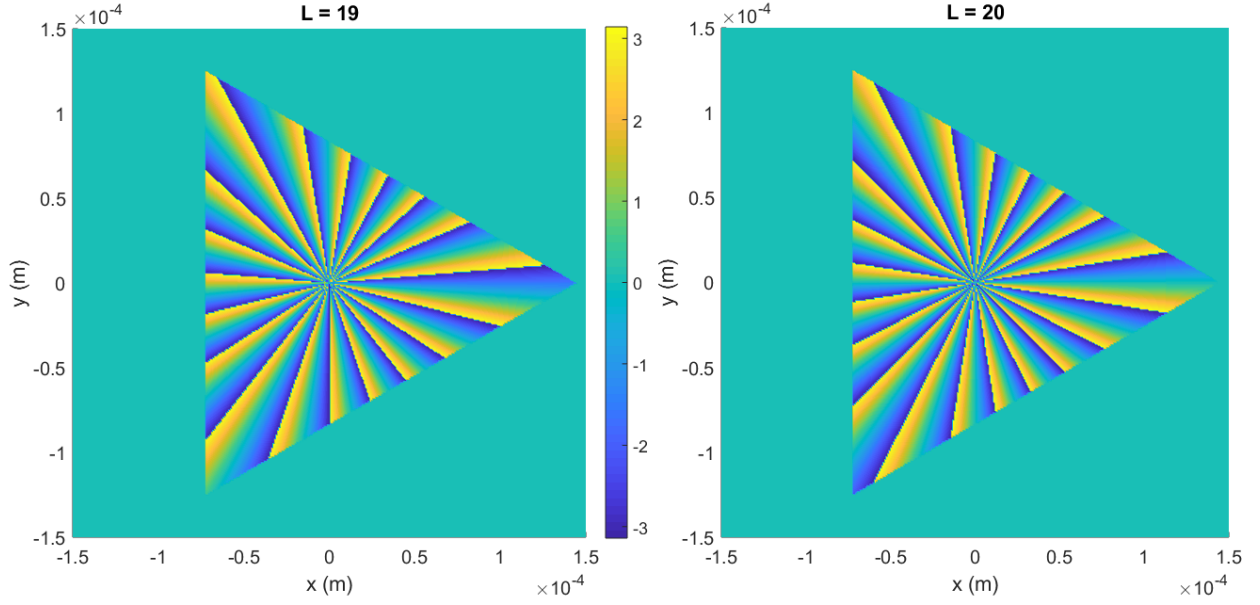


Figura 42: a) Fase de los haces Laguerre-Gauss con $\ell = 19$ y $\ell = 20$ atravesando la apertura triangular.

A simple vista no podemos encontrar un motivo en estos patrones de fase por la cual nuestro método debe ser válido, por esto requerirá un estudio más exhaustivo que no llevaremos a cabo.

2.5. Estudio de la caracterización de OAM en haces de alta frecuencia: difracción en la zona de rayos X.

Los resultados que hemos obtenido para longitudes de onda en la zona del visible para un haz de Laguerre-Gauss con $p = 0$ y ℓ menor a 20 nos ha permitido discernir bien cuál es el momento angular orbital del haz observando su patrón de difracción. Nuestro objetivo ahora será determinar si este método puede ser bueno para determinar el OAM de un haz de Laguerre-Gauss en la zona de los Rayos X.

Para estudiar la difracción en este régimen hemos utilizado una longitud de onda [13] de $0,16 \text{ nm}$. Como estamos trabajando con la difracción de Fraunhofer (campo lejano), se debe seguir cumpliendo que el número de Fresnel debe ser mucho menor que la unidad. Si mantenemos los parámetros anteriores invariantes, es decir, una anchura del haz $W_0 = 10^{-3} \text{ m}$ y $\eta = 1,8779$, debemos colocar la pantalla para observar el patrón de difracción a una distancia:

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda} \simeq 10^4 \text{ m} \ll z.$$

Como ahora trabajamos en la zona de Rayos X, no podemos observar el patrón de difracción a simple vista, por lo que para ello debemos colocar un detector de Rayos X en la posición de la pantalla. Colocando el detector a una distancia $z = 7 \cdot 10^4 \text{ m}$ recuperamos el patrón. En la figura 43 se representa un haz de Laguerre-Gauss con $W_0 = 1 \text{ mm}$ y $\eta = 1,8779$ donde en las imágenes superiores vemos un haz con $\ell = 1$ mientras que en las inferiores uno con $\ell = 3$: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción formado en una pantalla a una distancia de $7 \cdot 10^4 \text{ m}$.

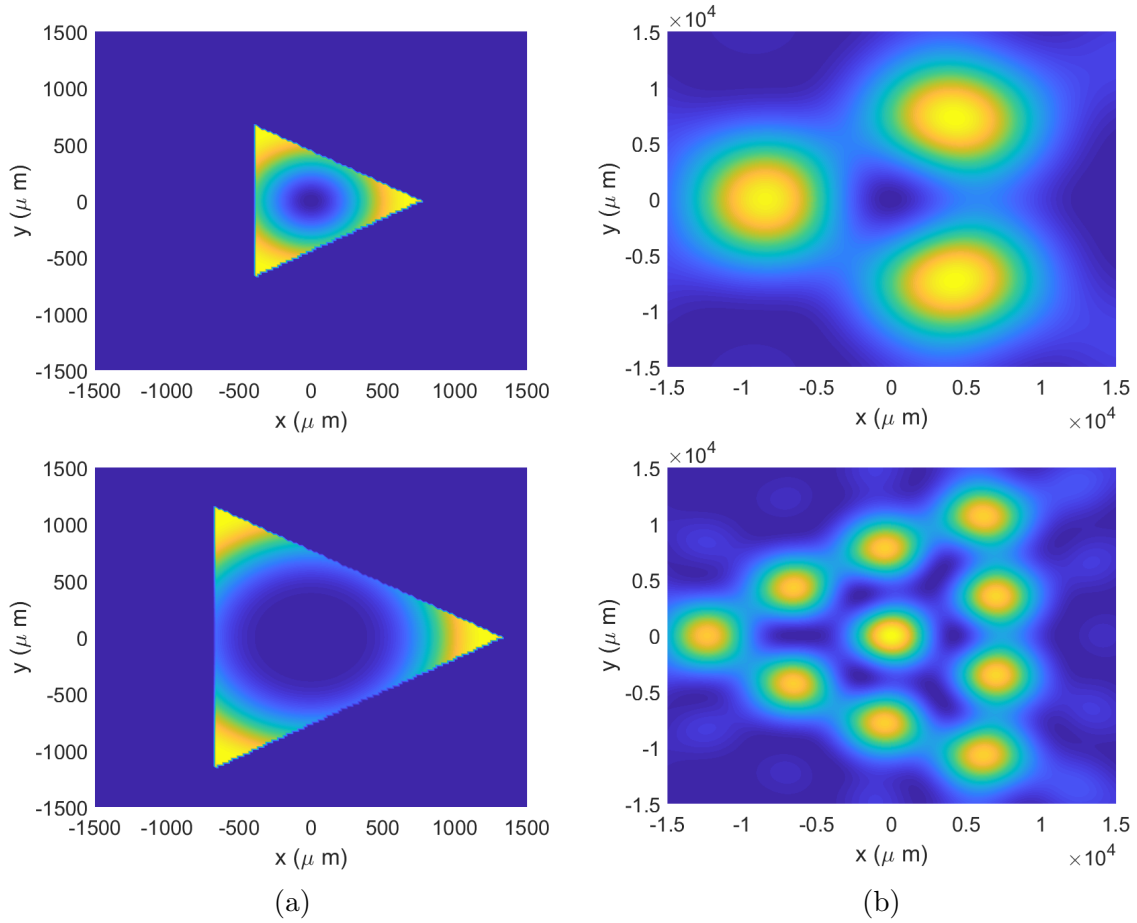


Figura 43: Haz de Laguerre-Gauss con $W_0 = 1$ mm y $\eta = 1,8779$ donde en las imágenes superiores vemos un haz con $\ell = 1$ mientras que en las inferiores uno con $\ell = 3$: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción formado en una pantalla a una distancia de $7 \cdot 10^4$ m.

Vemos que manteniendo los valores de anchura W_0 y Relación de los apartados anteriores deberíamos situar el detector de Rayos X a una distancia demasiado grande y por lo tanto llevar a cabo este experimento es inviable.

Si modificamos la anchura del haz a un valor $W_0 = 3$ μ m y mantenemos la Relación=1.8779, es decir, para una apertura del orden de los micrómetros, la distancia a la que necesitaríamos colocar el detector de Rayos X es mucho menor: $N_F \simeq 0,1m \ll z$.

Escogiendo una distancia $z = 15$ m para colocar el detector, vemos en la figura 44 como se forma el mismo patrón de difracción y se distingue con mayor claridad.

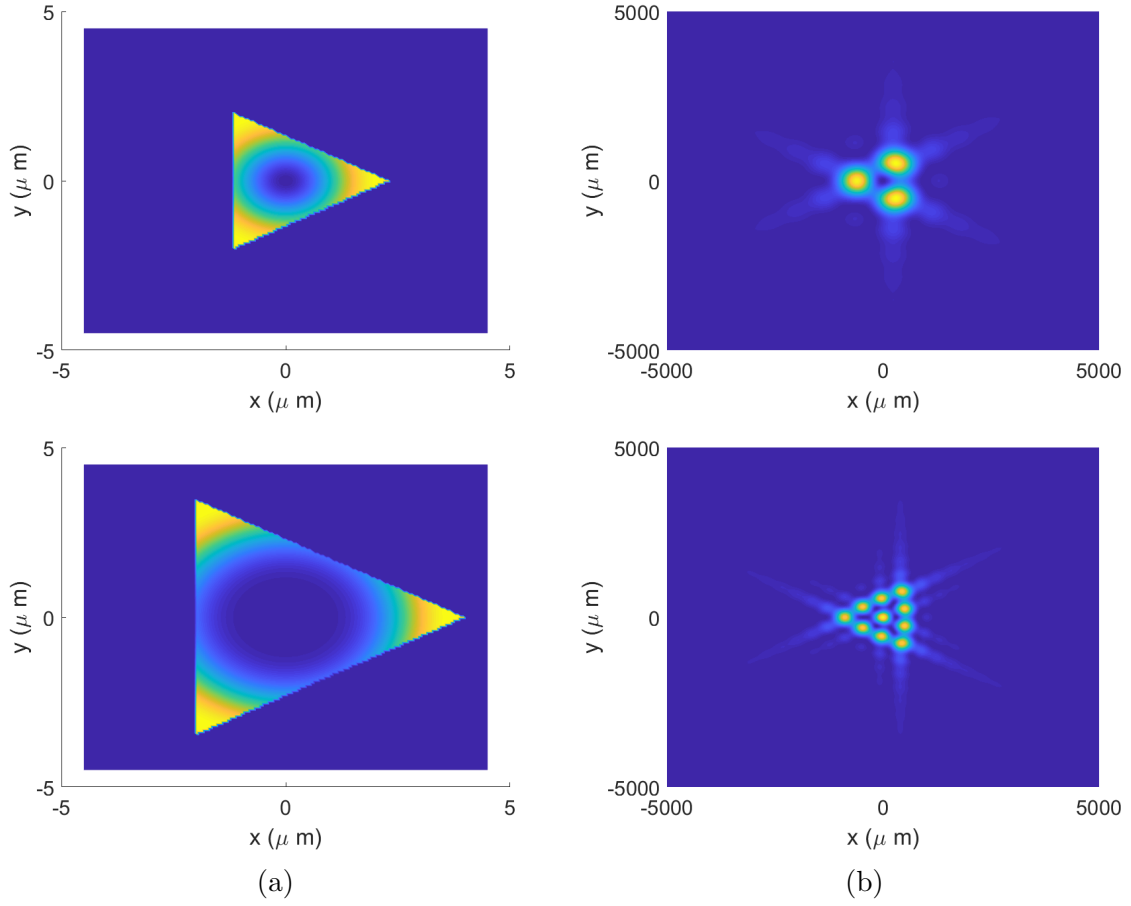


Figura 44: Haz de Laguerre-Gauss con $W_0 = 3 \mu m$ y $\eta = 1,8779$. En las figuras superiores vemos un haz con $\ell = 1$ mientras que en las inferiores uno con $\ell = 3$: a) haz atravesando la apertura visto desde arriba (sección en el plano xy) y b) patrón de difracción formado en una pantalla a una distancia de 15 m.

3. Discusión y conclusiones.

Podemos destacar que hemos conseguido recuperar con éxito los patrones de difracción obtenidos en el artículo original [1], consiguiendo patrones donde el número de máximos de intensidad que lo forman es una unidad superior a la carga topológica del haz incidente.

En la búsqueda del tamaño más óptimo de una apertura con relación al radio solo podemos decir con certeza que necesitamos un tamaño que deje pasar parte de la energía anillo pero sin que sea demasiada cantidad para visualizar bien todos los puntos que forman el patrón, siendo $\eta = 1,8779$ la que hemos utilizado en casi todas las simulaciones que nos ha permitido visualizar el patrón sin problemas.

No hemos conseguido visualizar la carga topológica con una apertura circular, ya que para valores superiores de $\ell = 2$ no obtenemos ninguna relación entre el número de anillos del patrón de difracción y el momento angular del haz.

Cuando mezclamos haces con distintos valores de ℓ , vemos que por uno de los vértices de la apertura pasa una mayor cantidad de energía, lo que se refleja en la pantalla donde hay un vértice con más intensidad. Para el modo que tenga mayor influencia en el haz, el patrón de difracción que vemos es el de éste con un poco de ruido introducido por el modo menos influyente. Podemos intuir observando los patrones de difracción si hay una mezcla de modos pero no saber con exactitud la cantidad porcentual que hay de cada uno.

La máxima capacidad de resolución que nos ha permitido este método es para un haz con $p = 0$ y $\ell = 19$, ya que para un $\ell = 20$ no hemos conseguido obtener 21 máximos de intensidad en el lateral del triángulo difractado.

En la zona de los Rayos X hemos recuperado los patrones manteniendo $\eta = 1,8779$ y modificando la anchura del haz, el tamaño de la apertura y la distancia a la que situamos la pantalla. Para una anchura $W_0 = 1 \text{ mm}$ y por tanto una apertura del orden de los milímetros debemos situar un detector de Rayos X a una distancia muy grande (del orden de 10^4 m). Si reducimos la anchura a $W_0 = 3 \text{ }\mu\text{m}$ y la apertura la escogemos del orden de los micrómetros, bastaría con colocar el detector a unos 15 m para poder obtener los patrones de difracción (teniendo en cuenta que al estar en una zona fuera del rango visible deberíamos colocar un detector de Rayos X para poder observarlos).

Discussion and conclusions.

We can highlight that we have successfully recovered the diffraction patterns obtained in the original article [1] obtaining patterns where the number of maximum intensity that form it is a unit higher than the topological charge of the incident beam.

In the search for the most optimal aperture size of in relation to the radius the only thing we can say with certainty that we need a size that lets pass part of the energy of the ring but without being too much quantity to visualize well all the points that make up the pattern, being $\eta = 1,8779$ the one that we have used in almost all simulations that has allowed us to visualize the pattern without problems.

We have not been able to visualize the topological charge with a circular aperture, due to values higher than $\ell = 2$ we do not obtain any relation between the number of rings in the

diffraction pattern and the angular moment of the beam.

When we mix beams with different values of ℓ , we see a greater amount of energy go through one of the vertices of the aperture, which is reflected in the screen where we see a more intense corner. For the mode that has the most influence on the beam, the diffraction pattern we see is this with some noise introduced by the least influential mode. We can intuit observing the diffraction patterns if there is a mixture of modes but we can not know with exactitude the percentage quantity that there is of each one.

The maximum capacity of resolution that has allowed us this method is for a beam with $p = 0$ and $\ell = 19$, due to a beam with $\ell = 20$ we have not been able to obtain 21 maximums of intensity in the side of the diffracted triangle.

In the X-Ray region we have recovered the patterns maintaining $\eta = 1,8779$ and modifying the width of the beam, the size of the aperture and the distance where the screen is located. For a width $W_0 = 1 \text{ mm}$ and therefore an aperture of the order of millimeters we must place a X Ray detector at a very large distance (order of 10^4 m). If we reduce the width to $W_0 = 3 \text{ m}$ and the aperture is chosen from the order of micrometers, it would be enough to place the detector at about 15m to be able to obtain the diffraction patterns (having in mind that being in an area outside the visible range we should place an X-ray detector to be able to observe them).

Referencias

- [1] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda, “Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light’s orbital angular momentum,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **105**, p. 053904, (2010). doi: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.053904>.
- [2] S. A. Kennedy, M. J. Szabo, H. Teslow, J. Z. Porterfield, and E. R. I. Abraham, “Creation of laguerre-gaussian laser modes using diffractive optics,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 043801, Oct 2002. doi: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.043801>.
- [3] B. G. Olmedo, “Fundamentos de electromagnetismo,” *Dpto. de Electromagnetismo y Física de la Materia (UGR)*, 2006.
- [4] M. Padgett, J. Courtial, and L. Allen, “Light’s orbital angular momentum,” *Physics Today*, vol. **57**, no. 5, pp. 35–40, (2004). doi: <https://doi.org/10.1063/1.1768672>.
- [5] L. Allen and M. Padgett, “The orbital angular momentum of light: An introduction,” *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*, pp. 1–12, (2011). doi: <https://doi.org/10.1002/9783527635368.ch1>.
- [6] D. Morin, *Electromagnetic waves*. Harvard University Physics Course, affiliated with MIT Education, (2019). <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/waves/electromagnetic.pdf>.
- [7] L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser beam propagation through random media*, vol. **152**. SPIE press Bellingham, WA, (2005). doi: [10.1117/3.626196](https://doi.org/10.1117/3.626196).
- [8] H. F. Weinberger, *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales*. Reverté, 1996.
- [9] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of photonics; 2nd ed.* Wiley series in pure and applied optics, New York, NY: Wiley, (2007). doi: <https://cds.cern.ch/record/1084451>.
- [10] J. Enderlein and F. Pampaloni, “Unified operator approach for deriving hermite–gaussian and laguerre–gaussian laser modes,” *JOSA A*, vol. 21, no. 8, pp. 1553–1558, 2004. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.21.001553>.
- [11] J. Garcia-Sucerquia, R. Castañeda, and F. F. Medina, “Fresnel–fraunhofer diffraction and spatial coherence,” *Optics communications*, vol. **205**, no. 4-6, pp. 239–245, 2002. doi: [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(02\)01378-0](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(02)01378-0).
- [12] M. Krenn, N. Tischler, and A. Zeilinger, “On small beams with large topological charge,” *New Journal of Physics*, vol. 18, p. 033012, mar 2016. doi: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/3/033012>.
- [13] Y. Taira and Y. Kohmura, “Measuring the topological charge of an x-ray vortex using a triangular aperture,” *Journal of Optics*, vol. **21**, no. 4, p. 045604, (2019). doi: <https://doi.org/10.1088%2F2040-8986%2F1904045604>.